物理学の廻廊

西島和彦監修

時空と重力

藤井保憲著

産業図書

序

この本では特殊相対論から出発して一般相対論の初歩まで達することを目標にしている.

よく知られているように Einstein は二つの相対性理論をつくり出した. 1905 年の特殊相対性理論と 1916 年の一般相対性理論とである. このうち特殊相対論の方は発表後時を経ずに広く認められるようになり, 1930 年代の初期に始まった素粒子物理学や原子核物理学の基本言語となった. これに反して一般相対論はやや違った道を歩んだ. 重力を我々の時空の曲り方として幾何学的に捉える類い稀な独創性と, その理論型式の美しさのゆえに尊敬はされたが, 物理学者の間でもどちらかといえば敬遠されがちであった. 今から 10 数年以前までは一般相対論は少なくとも物理学としては停滞の状態にあったといってよい. そのようになった理由はいろいろあるが大まかに整理すると次のようになろう.

(i) きわめて理論的な動機に基づいているために実際的な必然性が理解されなかった.

(ii) 一般相対論を検証したり, またそれを応用するような実験は非常に少なく, 近代的な実験の方法になじまなかった.

(iii) Riemann 幾何学という, 物理の他の分野ではなじみの薄い数学を用いた.

ところがこのような状況は最近になって著しく変化した. まず上の (ii) に対応した事情として実験手段が飛躍的に進歩した. 1960 年に Pound と

Rebka が行なった重力赤方変位の測定は Mössbauer 効果という当時最新の成果の応用であった．また人工衛星の発達に伴う大規模な超精密測定でいろいろな実験を行なうことができるようになり，実験重力という言葉も生まれた．以前のように何年かに一度の日食を待つ必要はなくなったのである．さらに天文学の観測方法も大きく変貌し，宇宙初期の物理学や，ブラックホールまでが研究の対象になってきた．このような実験的研究は今後さらに進歩し，一般相対論に益々現実的な意味を与えることになろう．

一方（i）で述べた純粋に理論的な観点にも重要な契機が現われてきた．最近の素粒子論ではゲージ理論と呼ばれる理論が素粒子物理の基本法則であることが確かめられつつあるが，この理論と一般相対性理論とは本質的に同じ構造を共有しているのである．このことから一般相対論は，重力と直接関係をもたない物理学の分野でも有力な指針となるであろうと思われるようになってきた．さらに重力と素粒子物理を統一しようとする試みも活発である．

さて一般相対論がこのような発展段階にあるとすれば（iii）に述べたような理由でこの雄大な理論を敬遠するというのはいわれなき口実ということになるであろう．元来物理学者は，もし物理として意味があると認めれば，慣れない数学などに辟易はしないものである．量子力学における行列力学などがその好例であろう．慣れてしまえばよいだけである．力学，電磁気学，量子力学の初歩で習う微分方程式や固有値問題などと同じように Riemann 幾何学にも大学の初年級で慣れておいてもよいと思う．

相対論について書かれた本の数は多い．それらは大体において二つのタイプにわけられよう．第1は専門的な本で，とり上げる題材の広さと深さ，また特に一般相対論では数学的な厳密さとを追求しようとする本である．第2はこれと対照的に，できるだけ数式を使わずに物理的内容をわかりやすく伝えようとする啓蒙書である．いずれのタイプにも名著が多い．

しかしこの本は上のどちらのタイプでもない．私がこの本で予想する読者は大体大学の教養課程で力学や電磁気学を習ったか，または習いつつある学生諸君である．教養課程の講義では，高校のときとは異なって物理学のオーソドックスな方法が初めて用いられる．これらのコースを終えた諸君の中には，専門によってはさらに高度な力学や電磁気学を学ぶ人もあるであろうが，その場合

でも，生涯役に立つ基礎知識のほとんどは教養課程の講義に含まれている．それと同じような意味で大学の初年級で相対論の基礎を正確に勉強しておくのは，将来どのような専門に進むにしても有益なことと思う．本物の味を一度味わってみて後，もっと専門的な本を読むべきかどうか考えてみてもよいであろう．

このような私の希望をこの本の中に生かそうとすると，どうしても数式を少なくするわけにはいかない．このシリーズの中ではむしろかたい本になってしまったかもしれない．その代りとり上げる題材は思い切って少なくした．たとえば Maxwell 方程式は最初のきっかけのときに出てくるだけで，完成した相対論的定式化についての詳しい話は含めない．また変分原理も一切省いた．しかし限られた数の題材を詳しく調べることによって理論の特質は十分に把握できるように工夫した．

数学的な厳密さもあまり気にしないことにする．むしろ簡単な特殊例を徹底的に調べ上げ，そこから一般的な結果を推論する方法をとった．調べ上げる以上は数式の途中も省略はできるだけ避け，完全な理解が得られるよう丁寧に説明した．

このような行き方の一例であるが，Riemann 幾何学の章ではほとんど 2 次元的な平面，曲面ばかりが議論される．しかし“2を聞いて4を知る”心積りさえあれば，曲がった4次元時空を理解するのに特に困難はないはずである．

全体の分量もあまり多くはないから何とか一気に読み通してほしい．そうすれば特殊，一般相対論について首尾一貫した正しい基礎知識を得ることができるであろう．仮りに相対論についてこれ以上の勉強をしないとしても永く将来の役に立つことと思う．最新のトピックスを聞いても，少なくとも正確な推量はすることができるようになるであろう．

ただ相対論が完成するまでの歴史的な話題や，また最近の実験などについての詳しいことはほとんど触れられていないので，是非他の本によって補ってほしい．先に述べた第2のタイプ，つまり一般的な啓蒙書でも結構である．もちろん，もっと詳しいことを勉強してみたいと思う読者が現われることを願っているが，そういう読者のためには専門書のリストも挙げておいた．

この序文の初めの方で述べたように，一般相対論は物理を専門とする人々の

間では必ずしも人気のある科目ではなかった．昔一度講義を聞いただけで忘れてしまった方々も多いと思われる．そのような方々の成人教育にもこの本を役立てて頂ければ幸いである．

1979 年 7 月

藤 井 保 憲

目　　次

第 1 章

特殊相対論

§1 電磁波

Maxwell 方程式

特殊相対性理論の出発点は電磁波の性質にある．電磁波とは，光，電波，X線といった諸現象の本性であり，真空中を“光速” $c \fallingdotseq 3\times10^8$ m/sec で伝わる波動である．これは電磁気に関する Maxwell の方程式に基づいて Maxwell が予言し，その後，実験によってその存在が確かめられたものである．その詳細についてここで述べることはできないが，結果の要点のみを記すと次のようになる．

電荷も電流も存在しない状態，つまり真空において，電場ベクトル $\boldsymbol{E}$，磁束密度ベクトル $\boldsymbol{B}$ は次の波動方程式を満たす；

$$\begin{cases} \left(\nabla^2-\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\boldsymbol{E}(x, y, z\,;\,t)=0 \\ \left(\nabla^2-\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\boldsymbol{B}(x, y, z\,;\,t)=0. \end{cases} \tag{1-1}$$

ここで ∇^2 は

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{1-2}$$

で定義される微分演算子で，Laplacian と呼ばれる．この理論では，伝播速度 c は

$$c=1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} \tag{1-3}$$

で与えられる．ここで ε_0, μ_0 は真空の誘電率，真空の透磁率であり，MKSA 単位系では

$$\varepsilon_0\fallingdotseq\frac{1}{4\pi}\frac{1}{9}\times10^{-9}\,\mathrm{N^{-1}m^{-2}C^2} \tag{1-4}$$

$$\mu_0=4\pi\times10^{-7}\,\mathrm{NA^{-2}} \tag{1-5}$$

である．

このうち μ_0 は電流の単位である 1A を定義する際に用いられる数であり，いわば人為的なものである．これに反して ε_0 の値は測定値である．つまり μ_0 を (1-5) のように決めることによって 1A が決まり，これから電荷の単位 1C が決まる（1秒間に 1C 流れる電流の強さが 1A である）．1C の電荷を 2 個，1m 離しておいたときに，両者の間に働く静電的な力を N (Newton) で測った値が $1/(4\pi\varepsilon_0)$ である．したがってこの力の測定から ε_0 が決まるのであり，当然近似値である．

このように静電的な力の測定から決められた値を (1-3) に代入すると $c\fallingdotseq3\times10^8$ m/sec となり，当時すでに知られていた光の速さの値とよく一致したので，Maxwell は光の本性は電磁波であろうと考えたのである．その後 Hertz の実験などを経て Maxwell の理論が確立された経緯については電磁気の本を見てほしい．

エーテル

ところがここに，よく考えてみると奇妙な疑問が残ったのである．それは，

電磁波は何の中を伝わるかということである．電磁波以前に知られていた波動はすべて何らかの物質の中を伝播する波であった．たとえば空気中を伝わる音を考えてみよう．空気は多数の分子からできている．何か物体を振動させるとその動きは空気の分子に伝えられ，それは次々にとなり合った分子に伝えられていくのである．巨視的な見方ではそれは空気の密度，または圧力の変化が空間の異なる場所へ伝わっていく現象である．このような場合，空気は音の媒質であると呼ばれる．ところが Maxwell の電磁波は何もない真空中を伝わるのである．太陽の光は宇宙空間をこえて地球にやってくる．このような事情は当時の物理学の常識を破るものであり，多くの人々を悩ました．

もちろん電磁波は物質の中を伝播することも可能である．特に誘電体の中を伝わる光の速さは

$$v=c/n \tag{1-6}$$

となる．この n は屈折率であるが，それは比誘電率 $\sqrt{\varepsilon_r}=\sqrt{\varepsilon/\varepsilon_0}$ に等しいことが示される．しかし何もない真空中でも電磁波が存在することの不思議さは少しも変わらない．

何かの媒質なしに波動を考えることはできないと思った人々は真空も一つの媒質と考え，エーテルという名前をつけた．しかしこのエーテルに何らかの物質的な性質を与えようとする試みは結局うまくいかなかった．それではもし媒質の存在をあきらめさえすれば問題は解消するかというと，これにも重大な困難がある．

つまり $c=1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ で与えられる光速とは一体何に対する速度かが不明なのである．そもそも速度とは，何かに対する速度である．言葉を換えていえば，座標系を指定しなければ速度という概念には全く意味がない．Maxwell 方程式はどのような座標系で正しいのかという疑問が生ずるのは当然である．

Galilei 変換

ある座標系 S があり，これに対して等速度で動いている第 2 の座標系を考え，S′ と呼ぶことにしよう．簡単のために S′ が動いている方向を x 軸の方向とし，その速さを V とする．地上に対して固定した座標系を S とすれば，等速度で動いている電車に固定した座標系が S′ である．ある物体の位置を S で

測った座標を x, y, z とし，S′ で測ったものを x', y', z' とすると時刻 t で

$$\begin{cases} x = x' + Vt \\ y = y' \\ z = z' \end{cases} \tag{1-7}$$

という関係がある（図 1）．これは一種の座標変換であり，特に“Galilei 変換”と呼ばれる．座標変換にはいろいろなものがあるが，その中でもあまり複雑でもない (1-7) に Galilei の名が冠せられているのには理由がある．それは Newton の力学における慣性の法則にかかわっているからである．

Newton の力学の第 1 法則は慣性の法則とも呼ばれ，力を受けていない質点はいつまでも等速度運動を続けるというものである．逆にこの法則が成り立つような座標系を“慣性系”という．S が慣性系であるとき，これに Galilei 変換 (1-7) を施して得られる S′ もやはり慣性系であることはすぐにわかる．つまり Galilei 変換は慣性系を慣性系に移す変換である．同じことであるが，第 1 法則は Galilei 変換に対して不変であるといってもよい．

加速中，またはカーブにさしかかった電車のような座標系は慣性系ではない．このような座標系は加速度系，または非慣性系と呼ばれ，第 1 法則は成り立たない．本当の力は働いていないのに座標変換による仮想的な力が加わるのである．

第 1 法則ばかりでなく Newton の第 2 法則もまた，Galilei 変換に対して不変である．その理由は，第 2 法則は加速度を含んでいるが速度を含んでいない

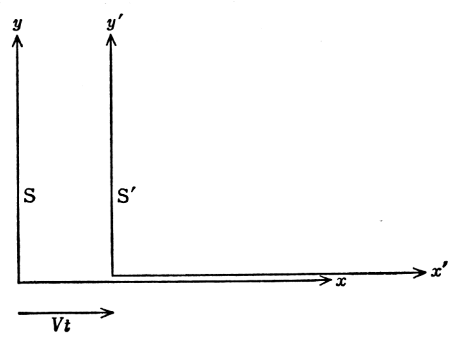


図 1　Galilei 変換

からである．ある質点の速度をSで測ったものを $\boldsymbol{v}$，それに対して Galilei 変換をした S′ で測った値を $\boldsymbol{v}'$ と書くと

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{V}+\boldsymbol{v}' \tag{1-8}$$

という関係がある．ここで $\boldsymbol{V}$ は S′ の原点がSに対してもつ速度であり，(1-7) の例でいえば $V_x=V,\ V_y=V_z=0$ である．(1-8) は (1-7) を時間で微分すれば出てくるが，直観的にも明らかなことである．(1-8) は速度 $\boldsymbol{v}$ の変換則といってもよいし，また速度の合成則といってもよい．いずれにせよ，速度というものは慣性系のとり方によって変わるものであり，絶対的な意味のあるものではない．一方加速度は Galilei 変換に対して不変である．そのことは (1-8) をもう一度時間について微分してみればわかる．ただし $\boldsymbol{V}$ は時間に依らないことを使うのである．このようなわけで第2法則は Galilei 変換に対して不変な量しか含んでいなかった．

絶対と相対

これに反して Maxwell 方程式から導かれる波動方程式 (1-1) には速度 c が含まれている．したがって (1-1)，ひいては Maxwell 方程式全体が **Galilei 変換に対して不変でない**ことになる．もし電磁波に媒質があるのであれば何も困ることはない．その媒質に固定した座標系で方程式が書かれていると考えればよい．音の例でいえば全体として静止した空気に対して一定の速度で伝播する波動が存在し，空気に対して動いている座標系から見れば音の進行速度が異なって見えるのは当り前である．しかし何も媒質がない所を伝わる電磁波に対して同じような考えを当てはめることはできない．ここで考えられることは二つあるといってよいであろう．

(i) 自然には“絶対座標系”が存在する．それをエーテルと呼んでもよいであろう．Maxwell の方程式はこの絶対座標系でのみ正しい．絶対座標系に対して動いている観測者から見ると光の速さは変わって見える．しかし光の速さは非常に速いので，絶対座標系に対する観測者の速さがあまり大きくない場合には光の速さの差を検出することは困難である．

(ii) 絶対座標系というようなものは存在しない．Maxwell 方程式はあらゆる慣性系において正しい．正しくないのは Galilei 変換である．互いに

等速度で運動している慣性系の間の座標変換はもっと別のものである．

この二つの論理的可能性のうち Einstein が選んだのは（ii）であった．（i）を最終的に葬り去ったのは Michelson-Morley の実験であり，これが特殊相対論の動機であったと伝えられている．事実 Einstein 自身もそのように述べている．しかし科学史家の中にはこの“通説”に疑問をはさむ人もいる．よく史実を調べてみると Einstein は Michelson-Morley の結果を知る前にすでに理論をつくり上げていたらしいのである．おそらく Einstein にとっては絶対座標系というような不自然なものは初めから問題外であったのであろう．何よりも Maxwell 方程式自身の中にそういう異質の要素は全く含まれていないことを Einstein は重視したのであろう．その意味で特殊相対論は電磁気学の全く論理的な帰結であり，Michelson-Morley の否定的な結果は Einstein にとって当然予想された結論にすぎなかったと思われる．

もちろんこの実験結果は Einstein を喜ばせたはずであり，また多くの人々を納得させるためには実験的な証拠から出発した方が有利であるとも考えられるので，Einstein 自身も“通説”のような説明を好んでするようになったのではないかと想像される．

Michelson-Morley の実験を含め，当時の歴史的な発展についてはここでは触れないので，他の本を読んでほしい．次の節では，Galilei 変換に代わるものとして Einstein が提唱した Lorentz 変換について話を進めよう．

§2 Lorentz 変換

特殊相対論の基本的要請

前節で述べた考えを背景に Einstein は次の二つの原理が成り立つことを要請し，特殊相対論を建設する基礎とした．

（I） **特殊相対性原理**：電磁気学を含む基本的物理法則に関してすべての慣性系は同等である．

（II） **光速度不変の原理**：光の速さはどの慣性系で見ても同じである．

“特殊”という語を冠したのは考える座標系を慣性系に限ったからであり，非慣性系にまで相対性を拡張する理論があとで述べる一般相対論である．

ところで電磁波が速さ c で伝播する波動であるということは (1-1) の波動方程式に現われる微分演算子

$$\Box \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \tag{2-1}$$

の型に基づいている．したがって上の二つの要請は，D'Alembertian と呼ばれるこの微分演算子がすべての慣性系において同じ型を保つべしと要請するのと同じことである．つまり慣性系の間の座標変換は (2-1) を不変に保つものでなければならない．そのような変換が "Lorentz 変換" なのであるが，それを導く前に，Galilei 変換では (2-1) が不変に保たれないことを確かめておこう．

変換式は (1-7) から

$$\begin{cases} x'=x-Vt \\ y'=y \\ z'=z \\ t'=t \end{cases} \tag{2-2}$$

である．最後に書き加えた式は一見わざわざ書くまでもないように見える．つまり時間は両方の座標系において共通であるというものである．このことは Einstein 以前には全く当然のことと考えられていたのであるが，これこそ特殊相対論において根本的な反省を迫られることになる点である．

さて x, y, z, t に関する微分演算子 $\Box$ を x', y', z', t に関する微分で書き直してみよう．(2-2) から

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}=\dfrac{\partial x'}{\partial x}\dfrac{\partial}{\partial x'}+\dfrac{\partial t'}{\partial x}\dfrac{\partial}{\partial t'}=\dfrac{\partial}{\partial x'} \\ \dfrac{\partial}{\partial y}=\dfrac{\partial}{\partial y'} \\ \dfrac{\partial}{\partial z}=\dfrac{\partial}{\partial z'} \\ \dfrac{\partial}{\partial t}=\dfrac{\partial x'}{\partial t}\dfrac{\partial}{\partial x'}+\dfrac{\partial t'}{\partial t}\dfrac{\partial}{\partial t'}=-V\dfrac{\partial}{\partial x'}+\dfrac{\partial}{\partial t'} \end{cases} \tag{2-3}$$

を得る．これを (2-1) に代入すると

$$\Box=\frac{\partial^2}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2}{\partial y'^2}+\frac{\partial^2}{\partial z'^2}-\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial t'^2}-2V\frac{\partial^2}{\partial x'\partial t'}+V^2\frac{\partial^2}{\partial t'^2}\right)$$

$$=\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)\frac{\partial^2}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2}{\partial y'^2}+\frac{\partial^2}{\partial z'^2}+2\frac{V}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial x'\partial t'}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t'^2} \tag{2-4}$$

となり

$$\Box' \equiv \frac{\partial^2}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2}{\partial y'^2}+\frac{\partial^2}{\partial z'^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t'^2} \tag{2-5}$$

とは一致しない．したがって **D'Alembertian は Galilei 変換に対して不変ではない**ことがわかった．

波動方程式 (1-1) は，電場ベクトル $\boldsymbol{E}$ や磁束密度ベクトル $\boldsymbol{B}$ に対する式である．座標変換に対してこれら $\boldsymbol{E}$ や $\boldsymbol{B}$ も変換を受ける可能性もあるので，D'Alembertian が不変であるかどうかだけ議論しても不十分であるかもしれない．事実正しい特殊相対論においてはこれらの場も互いにまざり合うことがわかるのであるが，それらはいわば次の段階での話である．第一義的に重要なのはやはり D'Alembertian の不変性なのである．

Lorentz 変換

さて Galilei 変換の代りに D'Alembertian を不変にする変換が存在するであろうか．もちろんそれは x 軸方向に等速度で動く座標系への変換という意味をもたねばならない．Galilei 変換について試してみたことからわかるように，y, z 方向のことは考慮の外において差し支えない．$\Box$ の中で

$$\Box_{xt} \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \tag{2-6}$$

という部分にだけ注目すれば十分である．これを不変に保つ変換式として一次式を仮定する．Galilei 変換は一次式であったし，とにかく簡単のためこのように選んでみよう．そこで

$$\begin{cases} x' = Ax + Bt \\ t' = Cx + Dt \end{cases} \tag{2-7}$$

とおいてみる．もちろん係数 $A, \cdots, D$ は実数とする．(2-7) の第2式で t' が t だけでなく x にも依存するとした点が (2-2) の最後の式と決定的に違っている．さらに x 軸方向に速度 V で動く座標系への変換という意味をもたせるために $B=-AV$ とおく．つまり

$$\begin{cases} x'=A(x-Vt) \\ t'=Cx+Dt \end{cases} \tag{2-8}$$

とおくのである.

さて (2-8) からは

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}=\dfrac{\partial x'}{\partial x}\dfrac{\partial}{\partial x'}+\dfrac{\partial t'}{\partial x}\dfrac{\partial}{\partial t'}=A\dfrac{\partial}{\partial x'}+C\dfrac{\partial}{\partial t'} \\ \dfrac{\partial}{\partial t}=\dfrac{\partial x'}{\partial t}\dfrac{\partial}{\partial x'}+\dfrac{\partial t'}{\partial t}\dfrac{\partial}{\partial t'}=-AV\dfrac{\partial}{\partial x'}+D\dfrac{\partial}{\partial t'} \end{cases} \tag{2-9}$$

となる. これを (2-6) に代入すると

$$\Box_{xt}=A^2\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)\frac{\partial^2}{\partial x'^2}+2A\left(C+\frac{V}{c^2}D\right)\frac{\partial^2}{\partial x'\partial t'}-\frac{1}{c^2}(D^2-c^2C^2)\frac{\partial^2}{\partial t'^2} \tag{2-10}$$

を得る. これが $\Box_{xt}$ と同じ型

$$\Box'_{xt}=\frac{\partial^2}{\partial x'^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t'^2} \tag{2-11}$$

となるようにしたいのである. 同じ型ということの中には c も (2-6) で用いたのと同じ c であるということが含まれている. そのためには

$$\begin{cases} A^2\left(1-\dfrac{V^2}{c^2}\right)=1 \\ A\left(C+\dfrac{V}{c^2}D\right)=0 \\ D^2-c^2C^2=1 \end{cases} \tag{2-12}$$

でなければならない.

(2-12) の第1式からは

$$A^2=\frac{1}{1-V^2/c^2} \tag{2-13}$$

が出てくる. この平方根をとるときにプラスの方を選んで

$$A=\frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}} \tag{2-14}$$

とする. こうしておけば $V\to 0$ としたときに, つまり何も変換しないときに $A\to 1$ となり, したがって (2-8) の第1式は $x'\to x$ となる. もしマイナスの

方を選ぶと，何も変換しないはずのときに $x'\to -x$ となって具合がわるい．

(2-13) または (2-14) において A は実数であるから $1-V^2/c^2>0$，つまり

$$V^2<c^2 \tag{2-15}$$

でなくてはならない．これは，光速より速い V は許されないことを示す．

次に (2-12) の第2式からは

$$C=-\frac{V}{c^2}D \tag{2-16}$$

が得られるが，これを (2-12) の最後の式に代入すると

$$D^2=\frac{1}{1-V^2/c^2} \tag{2-17}$$

となる．A のときと同じ理由でプラスの方をとって

$$D=\frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}} \tag{2-18}$$

とする．

(2-14), (2-16), (2-18) を (2-8) に代入すると結局

$$\begin{cases} x'=\dfrac{x-Vt}{\sqrt{1-V^2/c^2}} \\ t'=\dfrac{-Vx/c^2+t}{\sqrt{1-V^2/c^2}} \end{cases} \tag{2-19}$$

となる．これが求めていた変換式である．この変換式自身は実は Lorentz によってすでに考えられていたものであり，それゆえに Poincaré に従って "Lorentz 変換" と呼ばれている．Einstein はこの Lorentz の変換式に全く新しい意味を与えるのである．それについての説明にはいる前に (2-19) からすぐにわかることを列挙しておく．

(i) 非相対論的極限

座標変換の速度が光速に比べて十分に小さいとき，すなわち

$$|V/c|\ll 1 \tag{2-20}$$

のとき (2-19) は

$$\begin{cases} x'\approx x-Vt \\ t'\approx t \end{cases} \tag{2-21}$$

となり，これは Galilei 変換 (2-2) と一致する．つまり Galilei 変換は "相

対論的な" Lorentz 変換の，"非相対論的" 極限における近似式として再現されるのである．

(ii) 逆 変 換

(2-19) を x, t について逆に解くと

$$\begin{cases} x=\dfrac{x'+Vt'}{\sqrt{1-V^2/c^2}} \\ t=\dfrac{Vx'/c^2+t'}{\sqrt{1-V^2/c^2}} \end{cases} \tag{2-22}$$

となるが，これは (2-19) で $V\to -V$ として得られるものと一致する．

(iii) 速度の合成則

座標系 S で質点が x 軸方向に速度 v_x で動いているとする．すなわち微小時間間隔 dt の間に質点は dx だけ進み

$$v_x=\frac{dx}{dt} \tag{2-23}$$

である．S で測った時間間隔 dt と距離 dx に対応する S′ での値 dt', dx' は (2-19) から求められる．

$$dx'=\frac{dx-Vdt}{\sqrt{1-V^2/c^2}}, \qquad dt'=\frac{-(V/c^2)dx+dt}{\sqrt{1-V^2/c^2}}. \tag{2-24}$$

上で考えた質点の運動は S′ でもやはり x' 軸方向に進んでいるように見え，その速度 v_x' は

$$v_x'=\frac{dx'}{dt'} \tag{2-25}$$

で与えられる．これに (2-24) を代入すると

$$v_x'=\frac{dx-Vdt}{dt-(V/c^2)dx}=\frac{v_x-V}{1-(V/c^2)v_x} \tag{2-26}$$

を得る．V を $-V$ でおき換えると逆変換の式も得られる．

$$v_x=\frac{v_x'+V}{1+Vv_x'/c^2}. \tag{2-27}$$

この式は相対論的な速度の合成則を表わしている．まず非相対論的な極限では分母が 1 になり

$$v_x=v_x'+V \tag{2-28}$$

となる．これは Galilei 変換から得られる常識的な速度の合成則 (1-8) に他ならない．相対論的な場合には (2-27) の分母が効いてきて (2-28) のようにはならない．それでも S における等速度運動は S′ においてもやはり等速度運動である．これにより Lorentz 変換は確かに慣性系を慣性系に移す変換であるということができる．(2-7) において変換式は一次式であると仮定したが，その真の目的は上記の結果を保証することであった．

(2-27) からは

$$c^2-v_x{}^2=\frac{(c^2-v_x'^2)(c^2-V^2)}{c^2(1+Vv_x'/c^2)} \tag{2-29}$$

が得られる．これを (2-15) $V^2<c^2$ と組み合わせると次のことがわかる．つまり $|v_x'|<c$ ならば合成した速度もやはり $|v_x|<c$ である．したがって**光速以下の速度をどれだけ合成しても光速をこえることはない**．

(2-27) からわかるもう一つのことは，V または v_x' のいずれかが $\pm c$ であれば v_x もやはり $\pm c$ となることである．すなわち**光速はどんな慣性系から見ても同じ値をもつ**ことになり，この節の初めで述べた光速度不変の原理が確かに満たされているのである．

§3 Minkowski 空間

4元ベクトル

前節 (2-19) の Lorentz 変換の式に，もともと変換を受けなかった y, z を加えて再現してみよう．

$$\begin{cases} x'=\gamma(x-\beta w) \\ y'=y \\ z'=z \\ w'=\gamma(-\beta x+w). \end{cases} \tag{3-1}$$

ここで

$$\begin{cases} w=ct \\ \beta=V/c, \qquad \gamma=(1-\beta^2)^{-1/2} \end{cases} \tag{3-2}$$

とおいて式を見やすくした．w は時間 t の間に光が進む距離であるが，これを

そのまま時間の尺度としても差し支えない．なぜならば光速は今や座標系のとり方によらない普遍定数だからである．以後は t の代りに w を使うことが多い．また β は光速 c を単位として測った速度 V の値である．(3-1) は x 軸の方向に動く座標系に変換した場合の式であるが，たとえば y 方向に動く場合にはどのように変更したらよいかはすぐにわかるであろう．

(3-1) の最初と最後の式は時間と普通の座標とが互いにまざり合うことを示しており，時間とか空間に関する以前の考え方を根本的に変えるものである．しかしよく見ると (3-1) には，普通の 3 次元の Euclid 空間における座標変換とよく似たところもある．たとえば z 軸を軸として x, y 軸を θ だけ回転するような座標変換を行なうと（図 2）

$$\begin{cases} x'=x\cos\theta+y\sin\theta \\ y'=-x\sin\theta+y\cos\theta \\ z'=z \end{cases} \tag{3-3}$$

となる．これは x, y, z に関する一次変換である．

普通 x, y, z という座標の組はベクトルであるといわれているが，ベクトルであることの数学的表現として最も本質的なのは，その成分が一次変換を受けるということである．この意味で，同じく一次変換を受ける x, y, z, w はやはり**一つのベクトルを形成する**．ただ今度は四つの量の組であるので“4元ベクトル”と呼ばれる．つまり普通の 3 次元の空間に時間の軸を加えた 4 次元の空間を考え，その中の一種の回転によって四つの座標が一次変換を受けると考

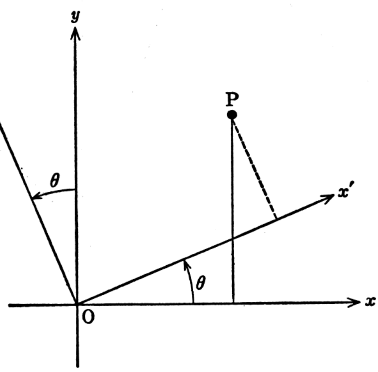


図 2 回転変換

えるのである．このような4次元の空間のことを“Minkowski 空間”，または“Minkowski 時空”と呼ぶ．変換（3-1）と（3-3）との間には類似点もあるが相違点もある．このような点を詳しく議論することにしよう．

Lorentz 不変量

再び（3-1）の x と w に関する部分のみに注目しよう．

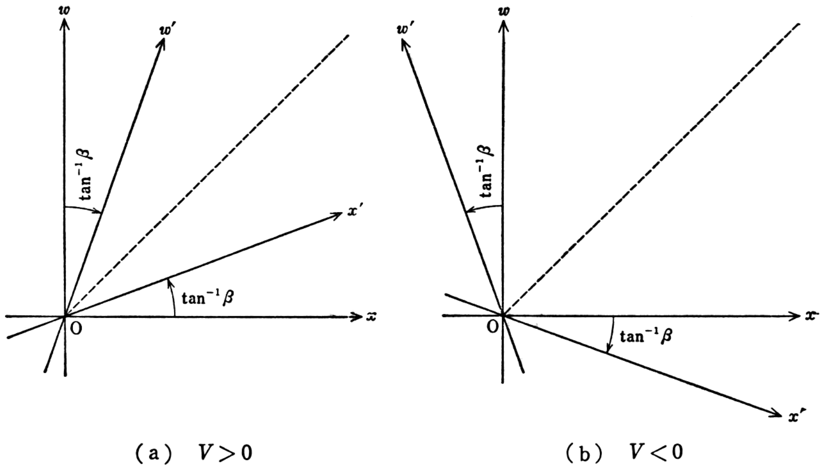
$$\begin{cases} x'=\gamma(x-\beta w) \\ w'=\gamma(-\beta x+w). \end{cases} \tag{3-4}$$

x を横軸に，w を縦軸にとって直交座標を描いてみよう（図 3）．これは4次元 Minkowski 空間の2次元的断面である．変換（3-4）はこれを斜交座標に移す変換になっている．x' 軸を描くには（3-4）の第2式で $w'=0$ とおき

$$w=\beta x \tag{3-5}$$

を得る．これは勾配が β の直線であり，β が正および負の場合について図 3（a）と図 3（b）に示してある．前節で述べたように $|V|<c$ であるから $|\beta|<1$ であり，x' 軸が x 軸となす角は 45° をこえることはない．$|V|\to c$ の極限でこの角は ±45° に近づく．同様な方法で w' 軸の方程式は

$$w=\frac{1}{\beta}x \tag{3-6}$$



（a） $V>0$ （b） $V<0$

図 3 Lorentz 変換

であり，これも図3に示してある．

さて (3-4) から

$$x'^2=\gamma^2(x^2-2\beta xw+\beta^2w^2)$$
$$w'^2=\gamma^2(\beta^2x^2-2\beta xw+w^2)$$

をつくり，第1式から第2式を引くと

$$x'^2-w'^2=\gamma^2(1-\beta^2)(x^2-w^2)=x^2-w^2 \tag{3-7}$$

となる．ここで (3-2) の最後の式を使った．これは

$$s^2\equiv x^2-w^2=x^2-c^2t^2 \tag{3-8}$$

という量が Lorentz 変換に対して不変であることを示している．このような量は“Lorentz 不変量”とも呼ばれる．

もし変換が Lorentz 変換ではなく，普通の直交変換，つまり回転であるとすると，(3-3) や図2から想像されるように原点からの距離

$$r^2=x^2+w^2 \tag{3-9}$$

が不変である．しかし Lorentz 変換に対して不変なのは普通の意味の距離ではなく，w^2 の前の符号を変えたものなのである．完全な 4 次元の型で書くならば Lorentz 不変なのは

$$s^2=x^2+y^2+z^2-w^2 \tag{3-10}$$

である．Euclid 空間とは異なって (3-10) を“距離”の自乗とするのが Minkowski 空間である．接近した2点 $(w\,;x,\ y,\ z)$ と $(w+dw\,;x+dx,\ y+dy,\ z+dz)$ の間の不変な距離の自乗は

$$(ds)^2=(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2-(dw)^2 \tag{3-11}$$

であり“無限小線素”または単に“線素”と呼ばれる．

ここで注意すべきことは，(3-10) または (3-11) の右辺が常に正とは限らないことである．したがってこれを s^2 とか $(ds)^2$ のように，いかにも正であるかのように書くのはいささかまぎらわしいといわなければならない†．さらに距離の自乗が必ずしも正でないということは，単なる記法上の都合以上に重要な意味がある．

† (3-10) を $-s^2$ と書く本もある．(3-11) についてはこの本では以後 $(ds)^2$ でなく ds^2 と書くことにする．

光　円　錐

簡単のため，w, x, y からなる3次元的な Minkowski 空間を考えてみよう（図 4）．その中でw軸を軸として頂角 90° の円錐を描いてみよう．そのような円錐は原点を頂点として二つ描くことができる．この円錐面上では

$$x^2+y^2=w^2 \tag{3-12}$$

である．すなわち $s^2=0$ である．また (3-12) は

$$\sqrt{x^2+y^2}=\pm ct \tag{3-13}$$

を意味するから，この円錐面は原点から出た光，または原点に到達する光の進路を表わしている．この意味でこれらの円錐は“光円錐”と呼ばれる．

光円錐の内側では $s^2<0$ である．この領域では時間座標の大きさ $|w|$ の方が空間座標の大きさ $\sqrt{x^2+y^2}$ より勝っているので，原点に対して“時間的”な領域と呼ばれる．逆に光円錐の外側では空間座標の方が勝っており，“空間的”な領域と呼ばれる．もちろん $s^2>0$ である．

さて x, y, z, w が4元ベクトルの成分であることを示すには 0, 1, 2, 3 と

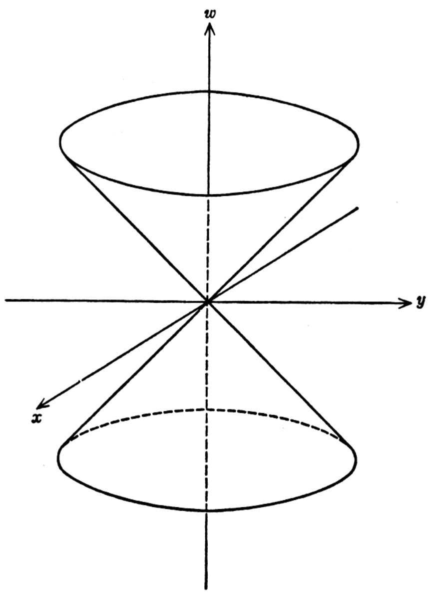


図 4　3次元 Lorentz 空間における光円錐

いう添字をつけて x^μ と表わすのが便利である．普通

$$x^0=w,\quad x^1=x,\quad x^2=y,\quad x^3=z \tag{3-14}$$

と書く．ここで，たとえば x^2 とは x の自乗ではなく，4元ベクトル x^μ の2番目の成分の意味である．添字は下につけた方がよさそうにも思われようが，下につけると別の意味になることがある．それについては第3章以下で詳しく説明するが，今は習慣に従って上つきの添字を用いることにしておこう．

Minkowski 計量

さて (3-10) のような不変量を (3-14) の記法で書く場合には

$$s^2=-(x^0)^2+(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2=\eta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu \tag{3-15}$$

と表わす．ここで $\eta_{\mu\nu}$ は

$$\begin{cases}\eta_{00}=-1, & \eta_{11}=\eta_{22}=\eta_{33}=1\\ \text{他の}\ \eta_{\mu\nu}=0 & \end{cases} \tag{3-16}$$

であり，また μ, ν については和をとる．詳しく書くと

$$s^2=\sum_{\mu=0}^{3}\sum_{\nu=0}^{3}\eta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu \tag{3-17}$$

である．一般に上つきの添字と下つきの添字として2度現われる同じ文字については，いつでも0から3までの和をとるものと約束して (3-15) では和の記号を省略したのである．この記号法は Einstein の縮約の規則と呼ばれ，相対論の数式には，特殊相対論，一般相対論を問わず常に用いられる．

(3-16) で与えられる $\eta_{\mu\nu}$ を行列の型で書くと

$$\eta_{\mu\nu}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \tag{3-18}$$

となり，憶えやすいであろう．

3次元の Euclid 空間では長さの自乗 r^2 は

$$r^2=x^2+y^2+z^2 \tag{3-19}$$

で与えられる．これを

$$r^2=(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2=\delta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu \tag{3-20}$$

と書くこともできる．ここで $\delta_{\mu\nu}$ は Kronecker のデルタ記号で，(3-18) の

ように行列の型で書くと

$$\delta_{\mu\nu}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \tag{3-21}$$

となる．(3-19) または (3-20) は3元ベクトル x^{μ} の，それ自身との内積であり，スカラーである．(3-15) または (3-17) は明らかにこれの4次元的拡張であり，二つの4元ベクトルからスカラー積をつくる方法を示している．Minkowski 空間では内積は，各成分の積の和ではなく，1箇所にマイナスがはいる．$\eta_{\mu\nu}$ はそのような性質を集約的に表わしている量であり，"Minkowski 計量" と呼ばれる．

§4 Einstein の時空概念

世界点，世界線

前節では Lorentz 変換の幾何学的意味を学んだが，この節ではその物理的意味を考えよう．簡単のために2次元的な Lorentz 変換

$$\begin{cases} x'=\gamma(x-\beta w)\\ w'=\gamma(-\beta x+w)\end{cases} \tag{4-1}$$

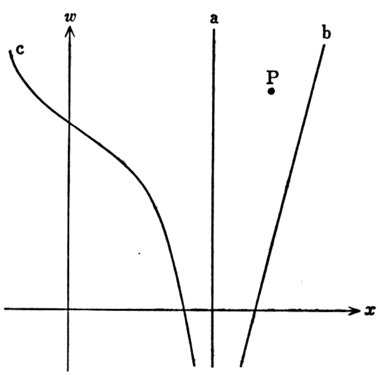


図 5 2次元的な Minkowski 空間における世界点 P といろいろな世界線の例
(a) 静止している質点．(b) x の正の方向への等速運動．
(c) x の負の方向への非等速運動．

に話を限ろう．つまり普通の空間については1次元的な直線運動しか考えないのである．

図5に2次元的な Minkowski 空間を示す．この座標系をSとしよう．この図の中の点Pの座標 $x, w=ct$ はある質点が時刻 w に場所 x にあることを示し，“世界点”と呼ばれる．時刻とともに世界点は動く．それをつないだものをその質点の“世界線”と呼ぶ．

Sにおいて静止している質点の世界線は w 軸に平行な直線である（図5）．一様な速度 v で x の正，または負の方向に動いている質点の世界線は，右または左に傾いた直線で表わされる．その勾配は c/v である．したがって速いほど横に寝ることになる．要するに2次元の Minkowski 空間に世界線を引いたものは鉄道のダイヤと同じものである．ただ鉄道のダイヤでは普通横軸が時間軸になっている．それで図6ではわざと横向きにして示してある．

速度が時間とともに変わる運動では世界線は曲線になり，各点における接線の勾配が，その瞬間における速度 v によって c/v と表わされる．前に述べたよ

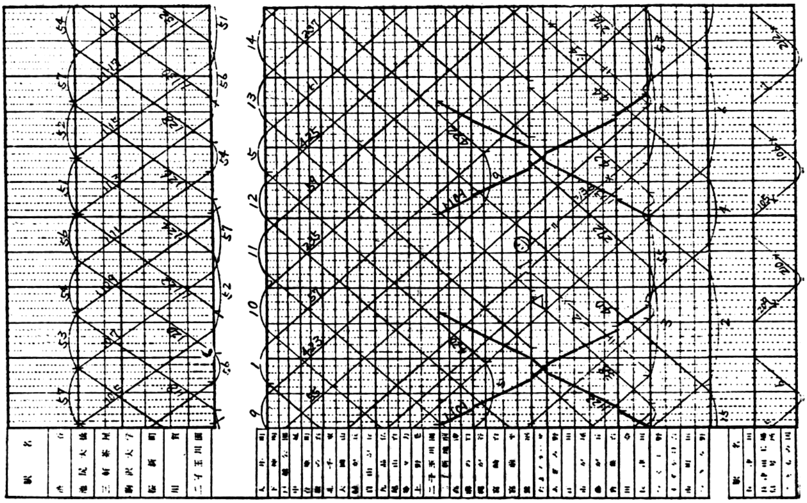


図 6 列車運行図表（東急電鉄）

この図で水平になっている点線は1分間隔の時間目盛．斜めの細線，太線は，それぞれ普通，快速電車を表わす．傾斜の違いに注目せよ．その他の曲線は列車の折返しなどを示すもので，今の話の筋には無関係．

うに $|v|<c$ であるから世界線の勾配は絶対値において必ず1より大きい．

次にSに対して速度 V で動いている座標系 (x', w') を S′ としよう．図7では $V>0$ の場合が描いてある．S′ で静止している点の世界線は w' 軸に平行である．Sで静止している点の世界線は w' 軸より左の方に傾いているから，それは S′ から見ればうしろ（x' 軸の負の方向）に動いていることになる．

さてSにおいて静止している二つの質点 M_1, M_2 があったとしよう．M_1 は $x=0$，M_2 は $x=l$ にある．M_1 の世界線は w 軸そのものであり，M_2 のそれは w 軸に平行で $x=l$ を通る直線である．二つの世界点 A, B は S で見れば同時刻であり，ともに $w=0$ である．これらの世界点を S′ で見るとどうなるであろうか．世界点Aの w' 座標は明らかにゼロである．すなわち

$$w'_A=0. \tag{4-2}$$

しかし世界点Bの w' 座標は，点Bから x' 軸に平行に引いた直線と w' 軸との交点 B′ で与えられる．これはゼロではない．その値は (4-1) の第2式に $x=l$，$w=0$ を代入して得られる．

$$w'_B=-\gamma\beta l. \tag{4-3}$$

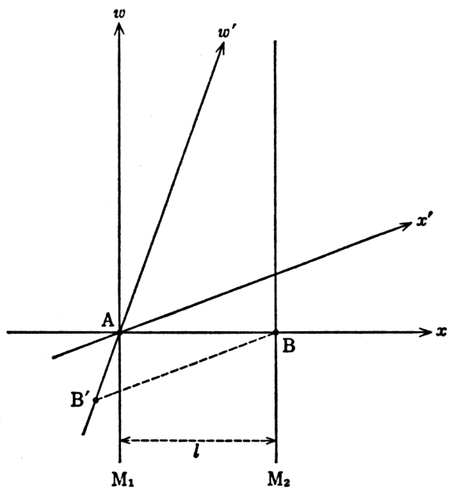


図 7

二つの世界点 A, B で表わされる事象は S では同時であるが，S′ ではそうでない．

これは，**S では同時刻とみなされる二つの事象 A，B が S′ では同時刻とは見えず，** B の方が先に起こった事象とみなされることを意味している．どうしてこんなことになるのであろうか．このパズルを解きあかすためには，同時刻という概念はそもそもどのようにして定義されるものかを反省してみる必要があると Einstein は説くのである．次のような思考実験を考えてみよう．

同時刻の相対性

S において静止している二つの時計 M_1, M_2 がある．これらの世界線は図 7 の直線 M_1, M_2 と同じものであるが，あとの便利のために x の原点をずらして図 8 のようにしておく．つまり M_1 は $x=-1$ にあり，M_2 は $x=+1$ にあるとするのである．これらの時計はもちろん正確に同じものであり，ある瞬間に合わせておけばあとはいつまでも同じ時刻を刻むものと考える．さて，離れた 2 点にある時計を合わせるにはどうしたらよいであろうか．最も簡単で正確なのは光の信号を使うことであろう．

二つの時計の目盛はあらかじめ $w=1$ にしてとめておき，ある瞬間に原点，

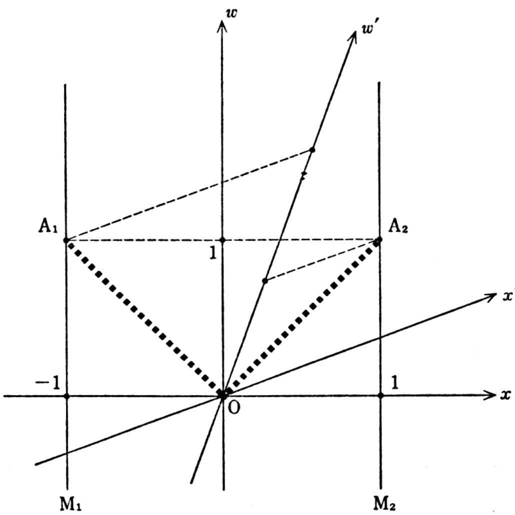


図 8

M_1, M_2 は二つの時計の世界線．破線は O から発射される光の世界線．
S で見て同時刻の A_1, A_2 は S′ で見れば同時刻ではない．

つまり二つの時計の中間においた電灯に点灯する．光はxの正負の方向に等しい速さcで伝わっていき，“同時に”二つの時計に到達するであろう．図8で示すならば光の進路を表わす世界線は二つの45°の直線として表わされ，それぞれがM_1, M_2の世界線と出合う点を事象A_1, A_2とする．これらの二つの世界点のw座標はともに1である．そこでそれぞれの時計に受光装置をつけておき，光を受けると同時にとめてあった時計を動かすようにしておけば，これで二つの時計は合わせられたといってよい．

次にこれらの出来事をS'から眺めるとどのようになるであろうか．図7のところで説明したのと同じように，二つの事象A_1, A_2は同時刻ではない．図8でA_1, A_2のw'座標を調べてみるとわかるように事象A_2の方が先に起こったように見える．その真の理由は次のようにしてわかる．

Sの原点とS'の原点とは世界点Oで一致している．その後，S'の原点の運動を表わす世界線はw'軸であるが，この原点に立って見ていると，時計M_2は前方から速さVでこちらに近づいてくるし，時計M_1は後方に同じ速さで遠ざかっていく．原点Oで発せられた光の信号はS'でも認めることができる．ここで注意すべきことは，光速度不変の性質により，S'で見ても，光は前後方に速さcで進んでいく．この光は当然，前方から近づいてくる時計M_2には早く出合い，逆に後方へ遠ざかりつつある時計M_1にはおくれて到達することになる．時計を合わせる方法はS'においても光の信号を使って行なうべきであるから，S'における観測者から見ると時計M_1のスタートはおそすぎるということになるのである．

もし変換がGalilei変換であったとすると光の速さも変わり，前方への光はS'ではおそく，後方への光は早く伝わることになる．その結果，光はS'で見ても同時に二つの時計M_1, M_2に到達することになるはずであった．このように考えると**光速度不変性を受け入れる限り，二つの事象の同時性という概念は座標系ごとに別々に決められる**ことであり，どの座標系から見ても同じ意味をもつものとは考えられないという結論になる．以前には当然のこととして何の疑問ももたれなかった概念についてEinsteinは根本的な見直しを求めたのである．

さてこのように同時刻の概念が変更されることになると，それに伴って従来

の常識では考えられなかったことが次々に現われてくる．その中で“時計のおくれ”と“長さの短縮”について説明しておこう．

時計のおくれ

Sは地上に固定された座標系でその観測者は亮であり，二つの時計をもっている．一つの時計 M_1 はSの原点におかれ，もう一つの時計 M_2 は距離 $x=1$ の所においてある．もちろん二つの時計は前に述べた方法によってすでに合わせてあるものとする．一方 S′ は純が乗っている列車であり，一様な速さ V で x の正の方向に動いている．彼も二つの時計 N_1, N_2 をもっている．時計 N_2 は S′ の原点に，時計 N_1 は $x'=-1$ におかれ，これら二つはあらかじめ合わせてある．さらに亮の時計 M_1 の世界線と純の時計 N_2 の世界線は図９の世界点Oで交わるとしておく．つまりある瞬間に二つの時計はちょうどすれ違うのである．ちょうど同じ場所にくるのであるから，このときに二つの時計の目盛を合わせることは可能である．この瞬間を $w=w'=0$ としてある．このようにして四つの時計は全部“一応”合わせてあることになる．

さて亮が時計 M_2 の場所に立っていると純の時計 N_2 が後方からやってきた．ちょうどすれ違ったときに自分の時計の目盛は w_1 であったが，その瞬間に見た純の時計の目盛は

$$w_1'=\sqrt{1-\beta^2}w_1 \tag{4-4}$$

であったというのである．これは w_1 よりも小さい値である．もともと $w=0$ では二人の時計は合わせてあったのであるから，純の時計は進み方がおそいと亮は判断する．一般的にいうと自分に対して動いている他人の時計はおくれているように見えるのである．

(4-4) を図９から導いてみよう．Sから見て時計 N_2 の世界線は

$$w=\frac{1}{\beta}x \tag{4-5}$$

で与えられる．これに $x=1$ を代入すると

$$w_1=\frac{1}{\beta} \tag{4-6}$$

を得る．これが事象Bの w 座標であり，時計 M_2 と時計 N_2 がすれ違ったと

きの時計 M_2 の目盛である．次にこの世界点 B の w' 座標を求める．そのためには $x=1$, $w=w_1=1/\beta$ を (4-1) の第2式に代入すればよい．

$$w'=\gamma\left(-\beta+\frac{1}{\beta}\right)=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{1-\beta^2}{\beta}=\sqrt{1-\beta^2}\frac{1}{\beta}\overset{(4\text{-}6)}{=}\sqrt{1-\beta^2}w_1. \quad (4\text{-}7)$$

これで (4-4) が得られた．図9には $\beta=1/4$ としたときの近似値が書き入れて

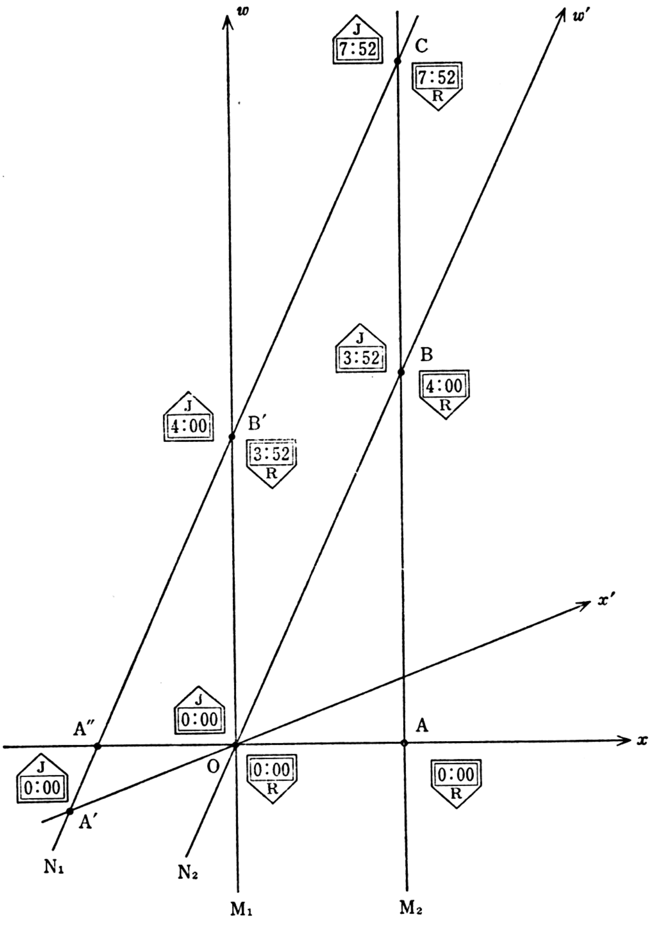


図 9　時計のおくれの説明

M_1, M_2 は亮の時計，N_1, N_2 は純の時計の世界線．それぞれのディジタル時計の文字が示してある．$\beta=1/4$ とした．

ある.

こういうわけで亮は，純の時計はおくれ気味であり，修理を要すると思い，これを純に告げてやろうと待ちかまえている．ところが純の方では全く反対の結論を得ていたのである．純は時計 N_1 の場所に立っていた．純の列車から見ていると地上はどんどんうしろへ去っていく．やがて亮の時計 M_1 が近づいてきた．すれ違った瞬間（世界点 B′）に両方の時計の目盛を読みとった．純の時計の目盛 w_2' に対して亮の時計の目盛 w_2 は

$$w_2=\sqrt{1-\beta^2}w_2' \tag{4-8}$$

であった．したがって純は，亮の時計はおくれているものと思う．このことを亮に教えてやろうと思っていると，やがて亮の立っているのが見えてきた．二人とも互いに自分の主張を述べながら近づき，すれ違った瞬間に互いの時計を見比べた．驚いたことに今度は二つの時計の目盛は一致していた！

(4-8) は (4-4) を導いたのと同じ方法によって容易に求められるので練習問題としてやってほしい．これは時計のおくれも互いに相対的なものであることを示している．また世界点Cにおいて両者の時計の目盛が一致することも確かめてみるとよい．このようになる理由は，時計 M_2 と時計 N_1 とは，そもそも以前のどんな時刻でも合っていたことはないからである．それは図9からわかるであろう．世界点 A と A′ とではいずれも目盛がゼロになっているが，これはSにおいてこの二つの時計を合わせたわけではなく，また S′ でそうしたわけでもないのである．Sから見て $w=0$ のとき時計 N_1 は世界点 A″ にあったのであり，このとき w' はすでにゼロよりも進んでいた．進み方がおそいために世界点 C で時計 M_2 と合ったのである．

Lorentz 短縮

亮も純も全く相等しい物差をもっている．二つの物差が本当に等しいかどうかをチェックするのは簡単である．それには列車の進行方向に垂直な方向に関しては二つの座標系には何の違いもないこと，つまり

$$y'=y, \qquad z'=z \tag{4-9}$$

であることを利用すればよい．もし列車が水平に走っているものとすれば物差を垂直に立て，すれ違う瞬間に目盛が合っていることを確認しておき，あとで

物差を水平に倒して距離を測定すればよい.

さて列車に乗っている純が長さ l の棒を進行方向に沿っておいている．その一方の端の世界線が図 10 の N_1 で，他の端の世界線が N_2 であるとしよう．純が測ってみて棒の長さが l であるというのは，たとえば世界点 B の x' 座標が l であるということである.

一方地上にいる亮もこの純の棒の長さを測ることができる．たとえば棒の後端がSの原点を通過したのと同じ時刻に，棒の先端がどこにあったかを記録するのである．つまりSにおいて測った長さとは，Sにおける同時刻に起こった二つの事象の間の距離とすべきであろう．このような測定は，以前に述べた方法によって合わせてある時計をたくさん並べておき，それぞれに，棒の先端が通った瞬間を記録する装置をつけておけば実現できるであろう．結局この意味で亮が測定する長さは図 10 の世界点 Aの x 座標ということになる．その値 l' を計算してみよう.

まず世界点 B の S における座標は (4-1) の逆変換

$$\begin{cases} x=\gamma(x'+\beta w') \\ w=\gamma(\beta x'+w') \end{cases} \tag{4-10}$$

に $x'=l$, $w'=0$ を代入すれば得られ，$x=\gamma l$, $w=\beta\gamma l$ となる．この点を通り，

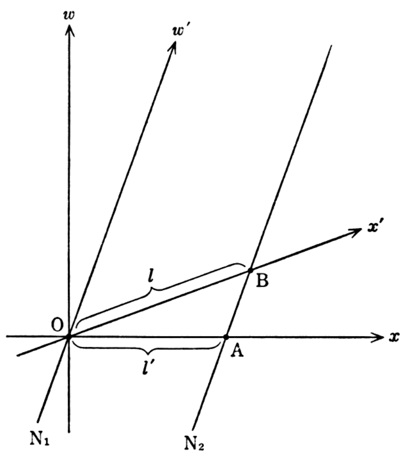


図 10　Lorentz 収縮の説明

純が長さ l であるという棒を亮が測ると $l'=\sqrt{1-\beta^2}l$ となる.

勾配 $1/\beta$ をもつ直線 N_2 の方程式は

$$w-\beta\gamma l=\frac{1}{\beta}(x-\gamma l) \tag{4-11}$$

となる．ここで $w=0$ とおけば

$$x=\gamma l(1-\beta^2)=\sqrt{1-\beta^2}\,l \tag{4-12}$$

を得る．これが上に述べた l' である．したがって

$$l'=\sqrt{1-\beta^2}\,l \tag{4-13}$$

ということになる．つまり，純が長さ l と主張する棒の長さを亮が測ると，それより小さい値 (4-13) になるというのである．ところで純が用いた物差は亮の物差と同じものであったのだから，結局，**動いている物体は静止しているときよりも縮んで見える**ということになる†．このことは，Lorentz が彼の変換式，すなわち Lorentz 変換を使ってすでに得ていた結論であるので Lorentz 短縮と呼ばれている．また短縮の比率 $\sqrt{1-\beta^2}$ は Lorentz 係数とも呼ばれる．ただ Lorentz はこれに満足すべき物理的意味を与えることができなかった．この奇妙な結果が時空概念の変更という重大な内容を含んでいることは Einstein によって初めて明らかにされたのである．

さて (4-13) は S′ におかれた物体を S で測ると短く見えるというものであ

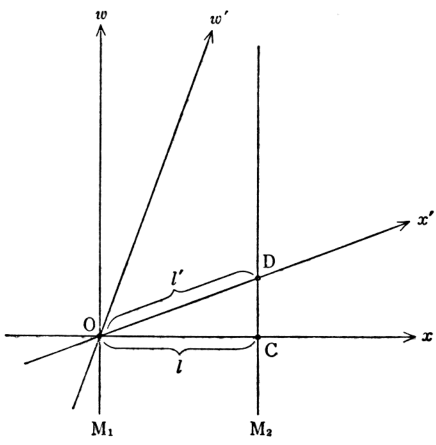


図 11　亮と純の役割を交換

† 空間が 3 次元ならば，短縮は進行方向についてのみ起こる．

るが，これでは S と S′ とがどちらも同等であるという相対性の要請に反することにはならないであろうか．実はそうでないことがわかる．S と S′ とをとり換えた情況というのは図 11 に示すようなものである．

Sに固定し，亮が測って長さが l である棒の長さを純が測ってみる．その結果を l' とすると (4-13) と全く同じ結果が得られるのである．これを確かめることは練習問題としておこう．

以上で時計のおくれと Lorentz 短縮についての説明を終わるがこれらの結果はいずれも我々の素朴な常識とは相容れない．しかし素朴な常識とは何かと考えてみると，それはすべて座標変換の速さ V が光速 c に比べて非常に小さい場合の経験に基づいていることがわかる．V が c と同じくらいの大きさになったときの経験などというものはそもそもなかったのであるから，古い常識から考えて奇妙なことが起こっても不思議はないのである．実際 (4-4) にしても (4-13) にしても，Lorentz 係数 $\sqrt{1-\beta^2}$ が 1 より相当ずれるのは $\beta=V/c$ が 1 に近づいた場合だけである．$\beta^2\ll 1$ ならばすべて常識的な結果に戻ってしまう．これは非相対論的極限では Lorentz 変換は Galilei 変換に帰着することから考えて当然期待されることである．

光速に近い運動は素粒子の現象において初めて観察することができる．このような現象においては実際特殊相対論はきわめて正確に成り立っている．これについては，このあとの §7 で議論する．しかしここでは特に時計のおくれに関係して μ 中間子の崩壊について説明しておこう．

μ 中間子の寿命

地球上には宇宙線が降りそそいでいるが，その中には μ 中間子と呼ばれる素粒子が多数含まれている．この粒子は静止状態では大体 $\tau=2\times10^{-6}$ 秒の寿命で電子と二つの中性微子に崩壊することが知られている．もし μ 中間子が速さ v で走っているとすると大体 τv の距離を走ると崩壊を起こすと思われる．これが相対論以前の常識である．この考えによれば $v=c$ で走っても $2\times10^{-6}\times3\times10^{8}=600\,\mathrm{m}$ くらいしか走らないことになる．

ところが実際には μ 中間子は地上何十 km の大気上層で発生し，地上にま

で到達することが知られている．これはまさに時計のおくれの効果である．もし μ 中間子の上に乗って測ってみると 2×10^{-6} 秒しか経っていないのに，地上の観測者から見るとそれは $\gamma=1/\sqrt{1-\beta^2}$ 倍経ったように見えるわけである．上に述べた 600 m がたとえば 30 km に延びているとするならば γ は 30 km/600 m=50 となっているはずである．これから $\beta=\sqrt{1-\gamma^{-2}}\approx1-\frac{1}{2}\gamma^{-2}=1-2\times10^{-4}=0.9998$ となる．つまり光速の 0.9998 倍の速さで走る μ 中間子ならば崩壊する前に 30 km 走るのである．

§5 固有時と4元速度

固 有 時

前節で明らかになったように，時間の進み方というものは座標系のとり方によって異なり，絶対的なものではない．それでは座標系のとり方には依らず，しかも時間の意味をもつ量は存在しないであろうか．実はそのような量は存在し，"固有時"と呼ばれる．それについて説明しよう．

図 12 の曲線はある質点の世界線である．二つの世界点 P, Q に対して，その間に進んだ微小距離を dx，その間に経った微小時間間隔 ($\times c$) を dw とする．Lorentz 変換を行なうと P, Q の座標は Lorentz 変換を受けるが，この

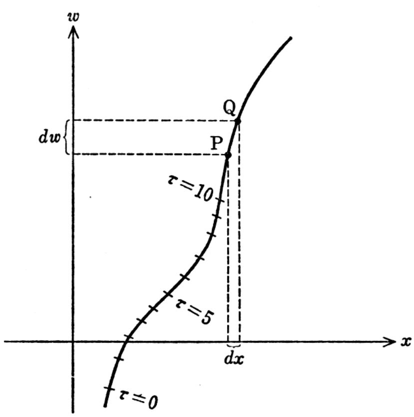


図 12

質点の世界線に固有時で目盛をつける．

変換は線型であり，したがって dx, dw も同じ変換を受ける．この際，(3-11) で説明したように†

$$ds^2=(dx)^2-(dw)^2=(dx')^2-(dw')^2 \tag{5-1}$$

は不変に保たれる．

ところで §4 の初めでも述べたことであるが，質点の世界線の接線の勾配は常に（絶対値において）1より大きい．これは (5-1) のような量が常に負であることを意味する．すなわち世界線上の二つの世界点はいつでも互いに時間的な関係にある．したがって (5-1) の不変量を

$$(d\tau)^2=(dw)^2-(dx)^2=(dw')^2-(dx')^2 \tag{5-2}$$

と書くことにしよう．この $d\tau$ は座標系のとり方に依らない．

Sで見ると質点が速度 v で等速度運動をしているとする．この同じ速度 v で動いている座標系 S′ に Lorentz 変換してみると，S′ では質点は静止している．つまり質点に飛び乗ってみるのと同じことである．この座標系では $dx'=0$ であるから (5-2) から

$$(d\tau)^2=(dw')^2 \tag{5-3}$$

となる．これは自乗の式であるが，

$$d\tau=dw' \tag{5-4}$$

としても差し支えない．この式が τ の意味を与えてくれる．すなわち τ とは，**その質点とともに動いている観測者が測る時間**に他ならない．このような時間（c がかけてあってもそうでなくてもよい）のことをこの質点の“固有時”と呼ぶ．これに対して普通の t や t'（または w や w'）は“座標時”と呼ばれる．

もし質点の運動が等速度運動でないならば，ある瞬間に Lorentz 変換をして質点に追いついても次の瞬間には質点はこの座標系に対して静止していない．質点が静止して見えるためにはすぐまた別の Lorentz 変換をしなくてはならない．固有時とは，各瞬間ごとに質点が静止して見えるような座標系に Lorentz 変換をしたとき，その座標系で測った時間の進み方と一致するものということができる．

これまでは説明を簡単にするために運動は x 方向にのみ起こると考えてきたが，一般的な運動では

---

† p. 15 の脚注参照．

$$(d\tau)^2=(dw)^2-(dx)^2-(dy)^2-(dz)^2 \tag{5-5}$$

と書かれる.

以上によって固有時の意味は明らかになったであろう. この固有時を用いて質点の世界線の上に目盛をつけることができる (図 12). もちろん目盛をつけるというだけならば座標時 w を使ってもよい. しかしそうしたのでは, 別の座標系に移ったときに目盛をつけ換えなければならないという不便さがある. この点で Lorentz 不変な τ を使った方が便利である.

(5-3) から (5-4) を導く際にプラスの方を選んだのであるが, こうしておけば質点の運動は τ が増大するにつれて生ずることになる. この意味で質点の座標 x^μ はパラメター τ の関数と考えてよい.

$$x^\mu=x^\mu(\tau). \tag{5-6}$$

ここで普通の Newton 力学における運動の記述の仕方をふり返ってみよう. 質点の運動状態は座標 x, y, z を時間 t の関数として表わすことで表現される. つまり

$$x^i=x^i(t) \tag{5-7}$$

である. ただしここでは $i=1, 2, 3$ である. たとえば x, y 平面内の2次元的な運動は図 13 のように表わすことができる. しかしこの表し方では時間が,

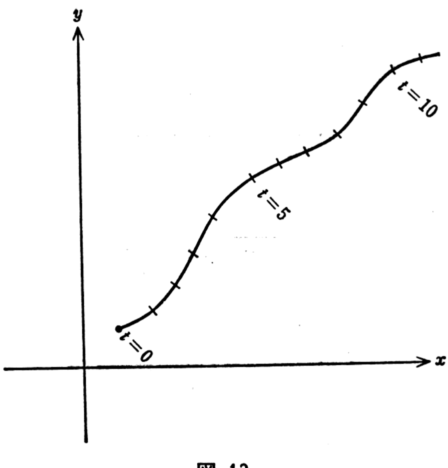


図 13
平面運動の軌道に時間で目盛をつける.

他の空間座標と違って特別の役割を果たしている．これは特殊相対論の考え方に反する．そこで Lorentz 不変な固有時をパラメターに選び，時間 t をもこのパラメターの関数として表わすというのが (5-6) の意味である．

4 元速度

非相対論的な力学では速度は

$$\boldsymbol{v}=\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} \tag{5-8}$$

によって定義されている．これも時間を特別扱いにしているから相対論では適当な量とはいえない．(5-6) と (5-7) を比べてみると (5-8) の代りに

$$u^\mu=\frac{dx^\mu}{d\tau} \tag{5-9}$$

のような量を考えたらよさそうに思われる．これを“4元速度”と呼ぶことにしよう．これが4元ベクトルであることについては特に説明するまでもないであろう．

この u^μ については次のような性質がある．

$$\eta_{\mu\nu}u^\mu u^\nu=\frac{\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu}{(d\tau)^2}=\frac{-(d\tau)^2}{(d\tau)^2}=-1. \tag{5-10}$$

すなわち u^μ は“時間的な単位ベクトル”ということができる．したがって u^μ の四つの成分は全部が独立ではない．

さて (5-2) の第1の等式の両辺を $(dw)^2$ で割ると

$$\left(\frac{d\tau}{dw}\right)^2=1-\left(\frac{dx}{dw}\right)^2. \tag{5-11}$$

これより

$$d\tau=\sqrt{1-\beta^2}\,dw=\frac{1}{\gamma}dw \tag{5-12}$$

を得る．したがって

$$\begin{cases} u^1=\dfrac{dx}{d\tau}=\gamma\dfrac{dx}{dw}=\dfrac{1}{c}\gamma v \\[2ex] u^0=\dfrac{dw}{d\tau}=\gamma. \end{cases} \tag{5-13}$$

この第1式は一般化して

$$u = \frac{1}{c}\gamma v = \frac{1}{c}\frac{v}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \tag{5-14}$$

としてよいであろう．これから u^μ の空間成分 $\boldsymbol{u}$ は普通の意味の速度を相対論的に拡張したものであることがわかる．しかし u^0 は単に Lorentz 係数であること以上にはまだ意味がよくわからない．それを明らかにするために次の節では運動量の相対論的拡張を考える．

§6 質点のエネルギー，運動量，運動方程式

4 元 運 動 量

Newton 力学では運動量は

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v} \tag{6-1}$$

で定義される．前節で速度 $\boldsymbol{v}$ は 4 元速度 u^μ に拡張されるべきことがわかったので運動量も同様に拡張しよう．

まず u^μ の空間成分を用いて

$$\boldsymbol{p} = mc\boldsymbol{u} \overset{(5\text{-}14)}{\downarrow}{=} \gamma m\boldsymbol{v} \tag{6-2}$$

とおく．これは非相対論的極限 $v \ll c$ で確かに (6-1) に近づく．(6-2) の第 1 式に対応する時間成分を

$$p^0 = mcu^0 \overset{(5\text{-}13)}{\downarrow}{=} mc\gamma \tag{6-3}$$

と書くことにする．(6-2), (6-3) をまとめると

$$p^\mu = mcu^\mu \tag{6-4}$$

となる．u^μ は 4 元ベクトルであったから，質量 m がスカラーであるとして，p^μ は 4 元ベクトルである．つまり S に対して速さ V で x 方向に動いている座標系 S′ から見ると p^μ は座標と同じ変換を受け

$$\begin{cases} p'^1 = \gamma(p^1 - \beta p^0) \\ p'^0 = \gamma(-\beta p^1 + p^0) \end{cases} \tag{6-5}$$

のように変わるということである．この意味で p^μ を“4 元運動量”という．

相対論的なエネルギー

このような4元ベクトルの，Lorentz 不変な大きさの自乗は $\eta_{\mu\nu}p^\mu p^\nu$ で与えられ，

$$\eta_{\mu\nu}p^\mu p^\nu \overset{(6\text{-}4)}{=} (mc)^2\eta_{\mu\nu}u^\mu u^\nu \overset{(5\text{-}10)}{=} -m^2c^2 \tag{6-6}$$

となる．(3-18) によって書き直すと

$$\boldsymbol{p}^2-(p^0)^2=-m^2c^2 \tag{6-7}$$

である．これを p^0 について解くと

$$p^0=\pm\sqrt{\boldsymbol{p}^2+m^2c^2}. \tag{6-8}$$

ここで $v \ll c$ の極限を考えてみよう．(6-2) によればこの場合

$$|\boldsymbol{p}| \ll mc \tag{6-9}$$

であるから (6-8) の右辺で

$$\sqrt{\boldsymbol{p}^2+m^2c^2}=mc\left(1+\frac{1}{2}\frac{\boldsymbol{p}^2}{m^2c^2}+\cdots\right)=mc+\frac{\boldsymbol{p}^2}{2mc}+\cdots \tag{6-10}$$

という展開を用いることができる．この最後の式の第2項は質点の運動エネルギー

$$K=\frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} \tag{6-11}$$

を c で割ったものである．すなわち

$$\sqrt{\boldsymbol{p}^2+m^2c^2}\approx\frac{1}{c}(mc^2+K) \tag{6-12}$$

である．ところで Newton の力学ではエネルギーは常に差で定義される量である．ある定数を足したり引いたりしてもそれがエネルギーであるという性質は全く変わらない．この不定性を逆に利用して mc^2+K が非相対論的な質点の運動エネルギーであると考えても差し支えないのである．そこで $\sqrt{\boldsymbol{p}^2+m^2c^2}$ こそ，相対論的に拡張したエネルギー E（を c で割ったもの）であるとみなすことにしよう．つまり

$$\sqrt{\boldsymbol{p}^2+m^2c^2}=E/c \tag{6-13}$$

とおく．これを (6-8) に代入すると

$$p^0=\pm E/c \tag{6-14}$$

となる．

ここでプラスとマイナスの両方の符号が可能であることは何を意味するのであろうか．このことの真の意味は 1928 年，Dirac によって初めて明らかにされた．Dirac は特殊相対論と量子力学を結びつけて相対論的な電子の理論をつくり上げたのであるが，それによれば (6-14) の一方の符号は電子に対応し，もう一方の符号は陽電子に対応する．陽電子というのは電子と全く同じ質量をもつが，電荷の符号がちょうど逆であるような粒子のことである．この陽電子の存在の予言とそれに続く発見とは，その後の素粒子物理学の出発点となったのである．しかしこの話題にはこれ以上立ち入らない．ここでは (6-14) でプラスの符号を選んでおけば以後の議論には差し支えがないことを記しておくにとどめる．この限りで p^0，したがって u^0 の物理的意味をつけることができた．

もし $\boldsymbol{v}=0$ であれば (6-2) から $\boldsymbol{p}=0$，したがって (6-13) は

$$E=mc^2 \tag{6-15}$$

となる．これは**質量 m の質点は，静止しているだけで mc^2 というエネルギーをもつ**ことを意味する．このようなエネルギーは"静止エネルギー"と呼ばれる．これは非常に大きなエネルギーである．1グラムの質点の静止エネルギーは

$$10^{-3}\times9\times10^{16}\,\mathrm{J}=9\times10^{13}\,\mathrm{J} \tag{6-16}$$

である．一方，水1グラムの蒸発熱は 100°C で約 540 カロリー$\fallingdotseq 2.3\times10^3$ J であり，種々の化学的エネルギーも大体この程度であることを考えると (6-16) がいかに巨大なエネルギーであるかが想像できよう．

しかしこのようなエネルギーは実際にとり出したり，供給したりすることができるものであろうか．この疑問に答えるためには質点の運動法則を吟味しなければならない．

相対論的な運動方程式

Newton の運動方程式

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt}=\boldsymbol{F} \tag{6-17}$$

は時間を特別扱いにしているから，Lorentz 変換を行なうと別の型になってしまうことは明らかである．§2 で述べた相対性原理（I）の立場からすれば，このように**基本的な方程式はどんな Lorentz 変換を施しても同じ型をしていなければならない**と考えられる．そこで (6-17) に代わる新しい方程式を探さなければならない．そのためにはすでに学んだ二つの事柄に注目しよう．一つは座標系のとり方に依らない固有時 τ が存在することであり，もう一つは，普通の運動量の相対論的拡張として4元運動量 p^μ を定義することができるということである．そこで (6-17) の相対論的拡張として

$$\frac{dp^\mu}{d\tau}=f^\mu \tag{6-18}$$

という方程式を考えてみればよさそうに思われる．ここで左辺は明らかに4元ベクトルである．したがってもし右辺の f^μ が4元ベクトルであればこの方程式はどんな慣性系でも同じ型で成り立つ．そのことは次のようにして証明される．

いま

$$A^\mu\equiv\frac{dp^\mu}{d\tau}-f^\mu \tag{6-19}$$

とおいてみよう．f^μ が4元ベクトルならば A^μ も4元ベクトルである．ある座標系 S で (6-18) が成り立っているとしよう．すなわち

$$A^\mu=0 \tag{6-20}$$

である．これは $A^0=A^1=A^2=A^3=0$ の意味である．Lorentz 変換をすると

$$A'^0=\gamma(A^0-\beta A^1),\quad A'^1=\gamma(A^1-\beta A^0),\quad A'^2=A^2,\quad A'^3=A^3 \tag{6-21}$$

となるが，各式の右辺に現われる A^μ は全部ゼロであるから $A'^\mu=0$，すなわち

$$\frac{dp'^\mu}{d\tau}=f'^\mu \tag{6-22}$$

となるのである．このようなとき，方程式 (6-18) は Lorentz 変換に対して“共変な型”に書かれているという．

さて (6-18) の空間的な成分，つまり $\mu=1, 2, 3$ の部分は Newton の方程式 (6-17) と密接な関係にあることはすぐに予想できよう．この関係をもう少

し詳しく調べてみよう．

(5-12) を使って (6-18) の空間成分を書き直すと

$$\gamma\frac{d\boldsymbol{p}}{dw}=\boldsymbol{f} \tag{6-23}$$

となる．さらに $w=ct$ を用いると

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt}=\frac{c}{\gamma}\boldsymbol{f} \tag{6-24}$$

と書けるが，この節の初めに述べたように非相対論的極限で $\boldsymbol{p}$ は Newton 力学の運動量になる．すなわち (6-24) の左辺は (6-17) の左辺に近づく．したがって $\boldsymbol{f}$ は非相対論的極限で Newton の力 $\boldsymbol{F}$ を c で割ったものに近づくことになる．

$$\boldsymbol{f}\approx\boldsymbol{F}/c. \tag{6-25}$$

このようにして新しい方程式 (6-18) は非相対論的極限で Newton の方程式を再現することがわかった．

なお (6-4) および (5-9) を使うと (6-18) は

$$m\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2}=\frac{1}{c}f^\mu \tag{6-26}$$

という型にも書ける．これは (6-17) の元来の型

$$m\frac{d^2\boldsymbol{x}}{dt^2}=\boldsymbol{F} \tag{6-27}$$

を拡張したものである．

ところで 4 元的な力 f^μ の第ゼロ成分 f^0 は何を表わすのであろうか．(6-18) で $\mu=0$ とおくと

$$\frac{dp^0}{d\tau}=f^0 \tag{6-28}$$

である．これに (6-14) のプラス符号の方，および (5-12) を使うと

$$f^0=\frac{\gamma}{c^2}\frac{dE}{dt} \tag{6-29}$$

を得る．右辺の dE/dt はエネルギーの変化率，すなわち仕事率を表わしている．

速度とともに変化する慣性

再び方程式 (6–18) の空間成分に戻ろう.

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{d\tau}=\boldsymbol{f}. \tag{6–30}$$

これによれば力を加えられた質点の運動量はいくらでも増大する. この点は Newton の力学と同じである. Newton 力学では $\boldsymbol{p}=m\boldsymbol{v}$ であるから, これは速度がいくらでも増大することを意味する. しかし相対論ではこうはならないはずである. 実際, 相対論的な運動量を定義する (6–2) によると

$$\boldsymbol{p}=\frac{m}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\boldsymbol{v} \tag{6–31}$$

である. この式を自乗すると

$$\boldsymbol{p}^2=m^2\frac{\boldsymbol{v}^2}{1-v^2/c^2} \tag{6–32}$$

となる. これを $v^2=\boldsymbol{v}^2$ について解くと

$$v^2=\frac{c^2\boldsymbol{p}^2}{m^2c^2+\boldsymbol{p}^2} \tag{6–33}$$

を得る. したがって v は常に c より小さい. $p\to\infty$ で初めて $v=c$ となる. このようにして, 相対論的な運動方程式 (6–18) のもとでは, **どんなに力を加えても質点の速さは光速をこえることはない**ことが確かめられた.

このことを, 質点の慣性は, 速度とともに増大するというように解釈することもできる. つまり (6–31) を

$$\begin{cases}\boldsymbol{p}=m(v)\boldsymbol{v}\\ m(v)=\gamma m\end{cases} \tag{6–34}$$

と書き, $m(v)$ を速度によって変化する慣性質量とみなすのである. m は $v=0$ としたときの慣性質量であるので特に“静止質量”と呼ぶ. 静止質量はスカラーであって速度には依らない. しかし $m(v)$ は速度とともに増大し, $v\to c$ では ∞ になる. 無限大の慣性質量をもつ質点の速さはどんなに力を加えてもそれ以上増すことはないというわけである.

なお, 静止質量に対して運動質量というような名称は使われない. その代り単に質点のエネルギーと呼べばよいのである. なぜならば (6–13) に (6–32) を代入すると

$$E=\gamma mc^2$$
$$=m(v)c^2 \tag{6-35}$$

となり，m が $m(v)$ になるということは，エネルギーが静止のときの値 mc^2 からその γ 倍になるということと全く同等だからである．

最後に (6-33) においで $m=0$ とおいてみよう．そうすると $\boldsymbol{p}$ の大きさにかかわらず常に

$$\boldsymbol{v}^2=c^2 \tag{6-36}$$

が得られる．つまり**質量ゼロの粒子は常に光速で走る**ことになる．そのような粒子は光そのものと考えてよいのではなかろうか．

光　子

実はこれまで光の本性は Maxwell の電磁波であると考えてきた．これはあくまで波動であって粒子ではない．しかし量子力学によれば，波動は同時に粒子としての性質ももっているのである．ここでその詳細は論じないが，光に対してこのような新しい描像を最初に与えたのは Einstein その人であった．この考え方は特殊相対論が発表された 1905 年に，それよりわずかに先立って公表され，光電効果に関する光量子仮説と呼ばれた．これは Newton 以来の光の粒子説の近代的復活ともいえる．その後の相対論的場の量子論の発展により，光は確かに質量ゼロの粒子，つまり“光子”として矛盾なく考えうることが示されたのである．なお光子に対しては (6-13) は

$$E=c|\boldsymbol{p}| \tag{6-37}$$

となる．

§7　素粒子反応の相対論的運動学

素粒子の反応

以上述べてきた特殊相対論は素粒子や原子核の振舞いを記述するための必要不可欠の道具立てとなっている．素粒子というのは，電子，陽子，中性子，中間子など，物質の微視的な構成要素である．光子もこれにはいる．素粒子同士衝突したり，散乱したりすることがある．その際に新しい素粒子が生成される

こともある．また一つの素粒子が他のいくつかの素粒子に崩壊することもある．このような場合に前節で述べた静止エネルギーがとり出されるのである．また，多くの場合運動の速さは光速に近い．したがってどうしても相対論的なとり扱いが必要となる．実際，素粒子の反応こそ，特殊相対論の最も豊富な検証の場であり，このような現象を通じて特殊相対論の正しさは非常に高い精度で成り立っていることがわかっている．

この節では代表的な現象として粒子の崩壊と，衝突による粒子の成生をとり上げ，前節で学んだ相対論的な運動量，エネルギーの概念がどのように適用されるかを例示してみよう．

以下の分析で特に重要な役割を果たすのは相対論的な運動量，エネルギーの保存則である．実はこの本では，このような保存則が成り立つことを厳密な議論によって証明したわけではない．しかし相対論的な運動方程式が Newton の運動方程式と型の上で似たところもあることを思い出せば，Newton 力学における保存則の議論をどのように拡張すればよいかは推測ができるであろう．結論としては**4元運動量が反応の前後で保存する**ことが示される．ここではこの結果は正しいものとし，それを応用してみることにしよう．

崩壊過程　$A \to B_1 + B_2$

A, B は素粒子でもよいし，原子核であってもよい．簡単のため，崩壊の結果できる二つの粒子は全く同じものとする．ただ，二つあるので番号 1，2 をつけただけである．各粒子の静止質量を m_A, m_B とする．上に述べた運動量，エネルギーの保存則は

$$p_A{}^\mu = p_{B1}{}^\mu + p_{B2}{}^\mu \tag{7-1}$$

と書かれる．

粒子Aが静止して見えるような座標系Sを考える．これをAの“静止系”という．この系では

$$\boldsymbol{p}_A = 0. \tag{7-2}$$

したがって (6-8) より

$$p_A{}^0 = m_A c \tag{7-3}$$

である．

終りの状態ではB粒子が二つあるのであるが，それらの運動量を $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$, エネルギーを E_1, E_2 と書こう．そうすると (6-13) により

$$E_1=c\sqrt{\boldsymbol{p}_1{}^2+m_B{}^2c^2},\qquad E_2=c\sqrt{\boldsymbol{p}_2{}^2+m_B{}^2c^2} \tag{7-4}$$

である．これらを (7-1) に代入する．$\mu=0$ の部分は

$$m_Ac=\frac{1}{c}(E_1+E_2). \tag{7-5}$$

また空間的な部分は

$$0=\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2 \tag{7-6}$$

となる．(7-6) によれば

$$\boldsymbol{p}_1=-\boldsymbol{p}_2\equiv\boldsymbol{p}_B. \tag{7-7}$$

したがって，座標系 S では，B_1, B_2 は互いに反対方向に，同じ大きさの運動量をもって出ていくことになる（図 14).

(7-7) を (7-4) に代入すると

$$E_1=E_2=c\sqrt{\boldsymbol{p}_B{}^2+m_B{}^2c^2}\equiv E_B. \tag{7-8}$$

これをさらに (7-5) に代入して

$$E_B=\frac{1}{2}m_Ac^2 \tag{7-9}$$

を得る．すなわち二つのB粒子はそれぞれ初めのA粒子の静止質量エネルギーの半分ずつをもつことになる．E_B は必ず m_Bc^2 より大きいから崩壊過程 A $\to B_1+B_2$ が起こるためには

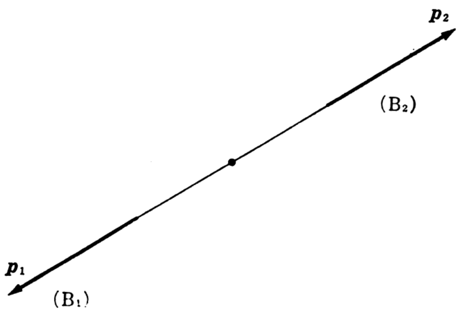


図 14　崩壊過程 A $\to B_1+B_2$
粒子Aが静止して見える座標系Sでは，B_1, B_2 は互いに反対方向に，同じ大きさの運動量をもって出ていく．

$$m_B < \frac{1}{2} m_A \tag{7-10}$$

でなければならない.

(7-9) を (7-8) に代入すると

$$\boldsymbol{p}_B{}^2 + m_B{}^2 c^2 = \left(\frac{E_B}{c}\right)^2 = \frac{1}{4} m_A{}^2 c^2. \tag{7-11}$$

これより

$$\boldsymbol{p}_B{}^2 = \left(\frac{m_A{}^2}{4} - m_B{}^2\right) c^2 \tag{7-12}$$

を得る. またB粒子の速さ v_B は (6-33) から得られる.

$$v_B{}^2 = c^2 \frac{\boldsymbol{p}_B{}^2}{m_B{}^2 c^2 + \boldsymbol{p}_B{}^2} = c^2 \frac{\left(\frac{m_A{}^2}{4} - m_B{}^2\right) c^2}{\left(m_B{}^2 + \frac{m_A{}^2}{4} - m_B{}^2\right) c^2}$$

$$= c^2 \frac{\frac{1}{4} m_A{}^2 - m_B{}^2}{\frac{1}{4} m_A{}^2} = c^2 \left(1 - \frac{4 m_B{}^2}{m_A{}^2}\right). \tag{7-13}$$

$A \rightarrow B_1 + B_2$ の型の崩壊として最もよく知られているものに, 中性 π 中間子 (π^0) が二つの光子 (γ) に崩壊する過程がある.

$$\pi^0 \rightarrow 2\gamma \tag{7-14}$$

この場合には $m_A = m_\pi$, $m_B = 0$ であり

$$E_B = \frac{1}{2} m_\pi c^2, \qquad |\boldsymbol{p}_B| \overset{(6\text{-}37)}{=} \frac{1}{c} E_B = \frac{1}{2} m_\pi c \tag{7-15}$$

となる. この過程では π^0 の静止エネルギーがそっくり光のエネルギーに変わってしまうのである. これは Lavoisier 以来の質量の保存則の最も劇的な破綻ということができよう.

これほど劇的ではないが, 実用上はもっと重要なものに原子核の分裂がある. この場合には大体において $2m_B$ は m_A より少し小さいだけであり, したがって (7-12) で与えられる $\boldsymbol{p}^2$ もあまり大きくない. その結果B粒子の運動は非相対論的になる. B粒子それぞれの運動エネルギー K_B は

$$K_B=\frac{1}{2}m_B v_B{}^2\overset{(7\text{-}13)}{\downarrow}{=}\frac{1}{2}m_B c^2\left(1-\frac{4m_B{}^2}{m_A{}^2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}m_B c^2\frac{(m_A-2m_B)(m_A+2m_B)}{m_A{}^2}$$
$$\approx\frac{1}{2}m_B c^2\frac{2(m_A-2m_B)}{m_A} \qquad (7\text{-}16)$$

となる．そこで初めと終りの状態での静止エネルギーの差を Q と書くと

$$Q=m_A c^2-2m_B c^2=(m_A-2m_B)c^2 \qquad (7\text{-}17)$$

であるが，これを用いて K_B は

$$K_B=\frac{m_B}{m_A}Q\approx\frac{1}{2}Q \qquad (7\text{-}18)$$

と書くことができる．結局 Q が二つのB粒子の運動エネルギーの和に転化するのである．このような運動エネルギーは熱や電流といった型の普通のエネルギーに変えることができる．つまり初めの粒子Aの静止エネルギーの一部分を他の型のエネルギーとしてとり出すことができるのである．これが核分裂による原子力エネルギーの基礎である．

粒子生成　$A_1+A_2\to B_1+B_2$ $(m_A<m_B)$

これは同種の粒子Aが二つ衝突して消滅し，それより重いB粒子を二つつくり出す過程である．たとえばAは陽子 (p)，Bは陽子の一つの励起状態 ($\varDelta$) として

$$p+p\to\varDelta+\varDelta \qquad (7\text{-}19)$$

という反応が実際に観測されている．陽子よりも $\varDelta$ 粒子の方が重い．したがって (7-19) のような反応を起こさせるためには最低限，質量差に相当する静止エネルギーの増加分を供給してやらなければならない．それは陽子の運動エネルギーによって供給される．陽子に運動エネルギーを与えるには陽子を加速すればよい．一般に素粒子や原子核を加速する装置を加速器という．

質量，エネルギーの単位

加速器にはいろいろな種類のものがあるが，共通の原理は電荷をもつ粒子が電場（電位差）によって引っ張られ，加速されることを利用するのである．こ

のとき得られるエネルギーは電荷×電位差である．

ところでこれまでに観測されている素粒子の電荷はすべて基本電荷 $e=1.60\times10^{-19}\,\mathrm{C}$ の正または負の整数倍である．陽子は $+e$，電子は $-e$ の電荷をもっている．基本電荷の1単位をもつ粒子を1ボルトの電位差で加速すると $1\times1.60\times10^{-19}\,\mathrm{J}$ のエネルギーが得られる．これを 1eV（電子ボルト）と呼び，エネルギーの単位として用いると便利である．

$$1\,\mathrm{eV}=1.60\times10^{-19}\,\mathrm{J}. \tag{7-20}$$

相対論では質量とエネルギーとは本質的に同等であるから，質量の単位にもこの電子ボルトを使うことができる．すなわち mc^2 がちょうど 1eV になるような m を $1\,\mathrm{eV}/c^2$ と決めるのである．これを普通の単位で表わすと

$$1\,\mathrm{eV}/c^2=1.60\times10^{-19}/(3\times10^8)^2=1.78\times10^{-36}\,\mathrm{kg} \tag{7-21}$$

となる．陽子の質量 $1.67\times10^{-27}\,\mathrm{kg}$ は $940\times10^6\,\mathrm{eV}/c^2$ という値になる．補助単位として $1\,\mathrm{keV}=10^3\,\mathrm{eV}$，$1\,\mathrm{MeV}=10^6\,\mathrm{eV}$，$1\,\mathrm{GeV}=10^9\,\mathrm{eV}$，$1\,\mathrm{TeV}=10^{12}\,\mathrm{eV}$ 等もよく用いられる．これによれば陽子質量は $940\,\mathrm{MeV}/c^2=0.94\,\mathrm{GeV}/c^2$ である．

陽子を V ボルトの電位差で加速するとその陽子は，静止エネルギーを含めて

$$E=mc^2+eV \tag{7-22}$$

だけのエネルギーをもつことになる．実際の加速器ではこのような陽子が多数つくられ，陽子ビームとしてとり出される．このようなビームを，別に陽子を含む物質からつくった標的を据えつけておき，それに照射すると（7-19）のよ

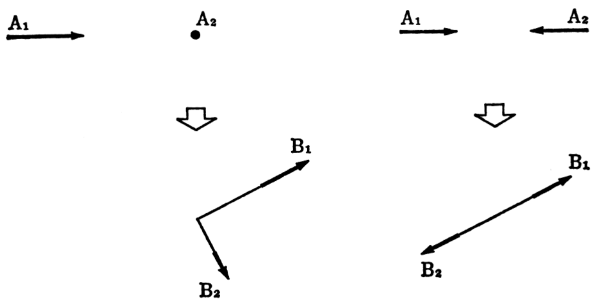


図 15　固定標的型の装置（a）とビーム衝突型の装置（b）による粒子生成
各図の上は始状態，下は終状態を示す．矢印 ➡ は運動量ベクトルを表わす．

うな反応が起こる．このような装置を“固定標的型”と呼んでおこう（図 15（a））．もう一つ別の型として“ビーム衝突型”の装置がある．これは上に述べた陽子ビームを二つつくっておき，それらを正面衝突させるのである（図 15（b））．この場合には衝突する二つの陽子は大きさが等しく，反対方向の運動量をもっている．以下ではまずこのビーム衝突型の装置で粒子生成が行なわれる場合を考えてみよう．

ビーム衝突型加速器

上に説明したように

$$\boldsymbol{p}_{A1}=-\boldsymbol{p}_{A2}\equiv\boldsymbol{p}_A \tag{7-23}$$

である．したがって衝突前の全（空間的）運動量は

$$\boldsymbol{p}_{A1}+\boldsymbol{p}_{A2}=0 \tag{7-24}$$

である．また（7-8）と同様にして

$$E_{A1}=E_{A2}=c\sqrt{\boldsymbol{p}_A{}^2+m_A{}^2c^2} \tag{7-25}$$

であり，全エネルギーは

$$W\equiv E_{A1}+E_{A2}=2c\sqrt{\boldsymbol{p}_A{}^2+m_A{}^2c^2} \tag{7-26}$$

である．(7-22) を用いれば

$$W=2(m_Ac^2+eV) \tag{7-27}$$

である．

さてこの反応の場合にも衝突の前後で粒子の全 4 元運動量は保存するものとする．そうすると衝突後に現われるB粒子の運動量とエネルギーについて

$$\boldsymbol{p}_{B1}+\boldsymbol{p}_{B2}=0 \tag{7-28}$$

$$E_{B1}+E_{B2}=W \tag{7-29}$$

が成立する．これらはそれぞれ (7-6)，(7-5) と全く同じ型をしている．したがってこの粒子生成の問題は，あたかも質量 W/c^2 の一つの粒子があり，それが二つの B 粒子に崩壊するとしたときの問題と同じなのである．

条件 (7-10) は

$$W>2m_Bc^2 \tag{7-30}$$

という型になる．これを（7-27）と組み合わせると

$$eV>(m_B-m_A)c^2 \tag{7-31}$$

となる．これらの式の下限，すなわち

$$W=2m_Bc^2,\qquad eV=(m_B-m_A)c^2 \tag{7-32}$$

のようなエネルギーの値を，この反応の“閾値”という．B粒子の静止エネルギーをやっと供給するに足るエネルギーである．重い粒子をつくり出すためには大きな W が必要となる．

W がこの閾値をこえる場合，生成される粒子のエネルギー E_B，運動量の大きさ $|\boldsymbol{p}_B|$ は，(7-9), (7-12) において m_A の代りに W/c^2 を代入することによって得られる．

$$E_B=\frac{1}{2}W \tag{7-33}$$

$$\boldsymbol{p}_B{}^2=\left[\left(\frac{W}{2c^2}\right)^2-m_B{}^2\right]c^2. \tag{7-34}$$

固定標的型加速器

以上はビーム衝突型の装置に関する分析であるが，固定標的型の装置によって実験を行なう場合も調べておこう．この場合粒子 A_2 が静止しており，これに向かって粒子 A_1 がエネルギー E_{L1} で入射するものとする．もしここで適当な Lorentz 変換を行なえば粒子 A_1 の速さはおそく見え，粒子 A_2 は A_1 と逆の方向に走っているように見えるようになるであろう．特に両者がちょうど反対向きで，速さが等しくなるようにすることができる．このように変換された座標系を“重心系”と呼ぶ．ビーム衝突型の実験はこの重心系で行なわれているものと考えてよい．これに対して，一方の粒子が標的として静止しているような座標系は“実験室系”と呼ばれる．このように呼ばれる理由は，ビーム衝突型の実験が行なわれるようになったのは最近の数年間のことであり，以前には粒子衝突の実験はすべて固定標的型の装置で行なわれたからである．

さてこの二つの座標系の間の Lorentz 変換を考えよう．二つの A 粒子の系の全4元ベクトルを重心系で

$$P^\mu=p_{A1}{}^\mu+p_{A2}{}^\mu \tag{7-35}$$

と書こう．また実験室系でも同じ量を考えることができるが，プライムをつけて

$$P'^\mu=p'_{A1}{}^\mu+p'_{A2}{}^\mu \tag{7-36}$$

と書くことにする．(7-28)，(7-29) により

$$P^0 = W/c, \qquad \boldsymbol{P} = 0 \tag{7-37}$$

である．また実験室系では入射粒子 A_1 のエネルギーを E_{L1} と書いたので

$$p'_{A1}{}^0 = E_{L1}/c. \tag{7-38}$$

一方標的粒子 A_2 については

$$p'_{A2}{}^0 = m_A/c, \qquad \boldsymbol{p}'_{A2} = 0 \tag{7-39}$$

であるから

$$P'^0 = (E_{L1} + m_A c^2)/c, \qquad \boldsymbol{P}' = \boldsymbol{p}'_{A1} \tag{7-40}$$

となる．

ところで $\eta_{\mu\nu}P^\mu P^\nu$ のような量は Lorentz 不変量である．したがって

$$\boldsymbol{P}^2 - (P^0)^2 = (\boldsymbol{P}')^2 - (P'^0)^2. \tag{7-41}$$

これに (7-37) と (7-40) を代入すると

$$-\frac{W^2}{c^2} = \boldsymbol{p}'_{A1}{}^2 - \left(\frac{E_{L1} + m_A c^2}{c}\right)^2 \tag{7-42}$$

となる．この右辺を計算すると $\boldsymbol{p}'_{A1}{}^2 - (E_{L1}/c)^2$ が出てくるが，これは (6-6) で考えた不変量に他ならない．

$$\eta_{\mu\nu} p'_{A1}{}^\mu p'_{A1}{}^\nu = -m_A{}^2 c^2. \tag{7-43}$$

これを使うと (7-42) は結局

$$W = \sqrt{2 m_A c^2 (E_{L1} + m_A c^2)} \tag{7-44}$$

となる．

この式からわかる重要なことは E_{L1} を大きくしても W はあまり大きくならないことである．$E_{L1} \gg m_A c^2$ の場合，W は大体 $\sqrt{E_{L1}}$ に比例する．E_{L1} を大きくしても，そのかなりの部分は二つのA粒子の重心を動かすだけに“浪費”されてしまい，本当に重い粒子Bを生成するためのエネルギーにはわずかの部分しか利用されないのである．

固定標的型の装置で現在世界最大のものはアメリカの Fermi 国立加速器研究所にあるもので $E_{L1} = 400\,\mathrm{GeV}$ まで出すことができる．これは陽子の静止エネルギーの約 400 倍であり，陽子の速さは (6-35) から計算して

$$\frac{v}{c} = \sqrt{1 - \left(\frac{mc^2}{E_{L1}}\right)^2} \cong 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{mc^2}{E_{L1}}\right)^2$$

$$=1-\frac{1}{2}\left(\frac{0.94}{400}\right)^2=1-1.77\times10^{-6} \tag{7-45}$$

となる．このように高いエネルギーにもかかわらず，重心系で利用できるエネルギーは

$$W=\sqrt{2\times0.94\times(400+0.94)}=27.5\,\mathrm{GeV} \tag{7-46}$$

にしかならない．

一方，ビーム衝突型の装置としてはスイスのヨーロッパ連合原子核研究所 (CERN) の ISR (交差貯蔵リング) と呼ばれるものが最大である．これは，それぞれ 28 GeV のエネルギーをもつ陽子ビームを正面衝突させるもので，$W=56\,\mathrm{GeV}$ となる．(7-46) と比べてみると，いかに“効率”がよいかがわかる．近い将来，それぞれ 400 GeV の陽子のビーム衝突型の加速器がつくられるが，同じ重心系エネルギーを固定標的型の装置でつくり出そうとすれば，(7-44) から，

$$\begin{aligned}E_{L1}&=\frac{W^2}{2m_Ac^2}-m_Ac^2=\frac{(800)^2}{2\times0.94}-0.94=3.4\times10^5\,\mathrm{GeV}\\&=340\,\mathrm{TeV}\end{aligned} \tag{7-47}$$

という桁外れに大きなエネルギーを必要とすることになる．このような高エネルギーをつくり出す加速器は今のところ全く実現不可能である．

このように重心系のエネルギーという点だけから見ればビーム衝突型の加速器の方が圧倒的に有利である．しかしいろいろな理由によってこの型の装置にすべてを期待することはできない．固定標的型の加速器の必要性もやはり高いのである．

§8　エネルギー・運動量テンソル

連続的な物質分布

前の §6 では質点の相対論的なエネルギー，運動量を議論した．それに基づいてこの節では連続的な物質分布のもつ相対論的なエネルギー，運動量の密度を考えてみる．このような量は4次元的な2階のテンソルとして代表的なものであるばかりでなく，後に一般相対論においては，Einstein の重力場の源

として重要な役割を演ずるのである．

物質の連続的な分布といっても，細かく分割していけば結局質点の集合と考えてよいことになる．このように考えた質点は"流体粒子"と呼ばれる．議論を簡単にするために流体粒子は全部同じ質量 m の質点であるとする†．ある場所，ある時刻に，すなわちある世界点 x にある質点の速度のベクトルを $\boldsymbol{v}(x)$ とする．ある時刻における $\boldsymbol{v}(x)$ を順々につないでいってできる曲線が"流線"である．この3次元的なベクトル場 $v^i(x)$ を相対論的に拡張するには，§5 で導入した4元速度 u^μ を用いる．

$$u^i(x)=\frac{1}{c}\gamma v^i(x), \qquad u^0(x)=\gamma=1/\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2(x)/c^2}. \tag{8-1}$$

エネルギー密度

これまで我々はある座標系から各質点（流体粒子）の運動を眺めていると考えてきた．たとえば物質全体を入れた容器に固定した座標系を想定すればよい．このような座標系を静止系と呼んでおこう．次にある質点にとび乗ったとしてみよう．その質点の近くではどの質点も大体同じように動いているであろうから，一つの質点に固定した座標系から見ると，近くの質点はどれもとまっているように見える．この座標系で質点の密度，つまり単位体積中に含まれる質点の数を測る．これを $N(x)$ と書こう．これに質量をかけると質量密度 $\rho(x)$ が得られ，さらに c^2 をかけるとエネルギー密度 $\mathcal{E}'(x)$ を得る．

$$\mathcal{E}'(x)=c^2\rho(x)=mc^2N(x). \tag{8-2}$$

ここで $\mathcal{E}$ にプライムをつけたのは，この量が点 x にある**質点とともに動く座標系**で測られたものであることを示す．

再び初めの静止系に戻ってみよう．世界点 x における質点は x 軸方向に動いているとしよう．静止系に移るには x 軸方向に Lorentz 変換をすればよい．ただしその速度は質点の速度 $\boldsymbol{v}(x)$ のマイナスである．したがって静止系では，一つ一つの質点は $m\gamma c^2$ のエネルギーをもつことになる．これに $N(x)$ をかけるとエネルギー密度になるが，この場合の単位体積は質点に固定した座

† 気体の中の気体分子を考えればよさそうに思われようが，これには問題がある．気体分子は"熱運動"をしており，それはいま考慮の外におきたいからである．むしろ，雲や霧の中の水滴を思い浮かべてほしい．

標系におけるものであり，静止系で測った単位体積ではない．静止系で見て x 軸方向の単位の長さは，Lorentz 短縮の効果により，質点に乗った座標系では γ の長さに対応する．y, z 方向には変化がないから，結局静止系における単位体積は，質点に乗った系では γ になっていることになる．したがってその中に含まれる質点の数は $\gamma N(x)$ である．これに上で述べたエネルギー $mc^2\gamma$ をかけなければならない．このようにして，静止系で見たエネルギー密度 $\mathcal{E}(x)$ は

$$\mathcal{E}(x)=c^2\rho(x)\gamma^2 \tag{8-3}$$

となる．

運動量密度

(8-3) はもちろんスカラー量ではない．(8-3) と組になっている他の量が存在するはずである．それを探すために運動量の密度というものを考えてみよう．ある世界点 x の近くでは質点はどれも同じ方向を向いており

$$\boldsymbol{p}=m\gamma\boldsymbol{v} \tag{8-4}$$

という運動量をもっている．前と同じようにこれに $\gamma N(x)$ をかけると，静止系で見た運動量の密度

$$\mathcal{P}^i=v^i\rho(x)\gamma^2 \tag{8-5}$$

が得られる．ここで (8-1) を思い出してみると (8-3), (8-5) は

$$\begin{cases} \mathcal{E}(x)=c^2[u^0(x)]^2\rho(x) & \text{(8-6)} \\ c\mathcal{P}^i(x)=c^2u^i(x)u^0(x)\rho(x) & \text{(8-7)} \end{cases}$$

と書けることがわかる．

これらの式の右辺には4元速度 u^μ の2次式が現われている．したがって

$$T^{\mu\nu}(x)=c^2\rho(x)u^\mu(x)u^\nu(x) \tag{8-8}$$

を定義すると (8-6), (8-7) は

$$\mathcal{E}=T^{00}, \qquad \mathcal{P}^i=c^{-1}T^{0i}=c^{-1}T^{i0} \tag{8-9}$$

と書くことができる．

エネルギー・運動量テンソル

(8-8) における u^μ は4元ベクトルである．二つの4元ベクトルの積は2階

のテンソルと呼ばれる．(8-8) は特に

$$T^{\mu\nu}=T^{\nu\mu} \tag{8-10}$$

を満たすので対称テンソルと呼ばれる．x 軸方向に Lorentz 変換を行なうと

$$u'^1=\gamma(u^1-\beta u^0), \qquad u'^0=\gamma(u^0-\beta u^1) \tag{8-11}$$

であり，したがって $T'^{\mu\nu}$ は次のような変換を受ける．

$$\begin{cases} T'^{00}=\gamma^2(T^{00}-2\beta T^{01}+\beta^2 T^{11}) \\ T'^{01}=\gamma^2[-\beta T^{00}+(1+\beta^2)T^{01}-\beta T^{11}] \\ T'^{0k}=\gamma(T^{0k}-\beta T^{1k}) \qquad (k=2,3) \\ T'^{11}=\gamma^2(\beta^2 T^{00}-2\beta T^{01}+T^{11}) \\ T'^{1k}=\gamma(-\beta T^{0k}+T^{1k}) \qquad (k=2,3). \end{cases} \tag{8-12}$$

他の成分は変わらない．この変換式は $T'^{\mu\nu}=c^2\rho u'^{\mu}u'^{\nu}$ に実際 (8-11) を代入し，その結果を整理して得られるものであるが，(8-12) のような変換を受ける量があれば，それが $u^{\mu}u^{\nu}$ の積でなくても対称 2 階のテンソルと呼ぶのである．

このようにして物質のエネルギー密度，運動量密度は 2 階のテンソル $T^{\mu\nu}$ のそれぞれ 00 成分，$i0$ 成分として表わされることがわかった†．この意味で $T^{\mu\nu}$ は "エネルギー・運動量テンソル" と呼ばれる．このテンソルの ij 成分は何であろうか．これは連続体の力学に出てくる応力のテンソルに他ならないのであるが，ここではこれ以上立ち入らない．

保　存　則

この $T^{\mu\nu}$ についてはエネルギーと運動量の保存則を表わす重要な関係式

$$\partial_\mu T^{\mu\nu}(x)=0 \tag{8-13}$$

が成り立つ．これを導こう．上の式で ∂_μ という記号は $\partial/\partial x^\mu$ の略記法であり，これからもよく使われる．(8-13) を普通の型で書いておくと

$$\frac{\partial T^{\mu 0}}{\partial w}+\frac{\partial T^{\mu 1}}{\partial x}+\frac{\partial T^{\mu 2}}{\partial y}+\frac{\partial T^{\mu 3}}{\partial z}=0 \tag{8-14}$$

である．

(8-13) を導く前に一つ注意しておくべきことがある．(8-3)，(8-5)，(8-9)

† $i=1,2,3.$

を比べると

$$T^{0i}=cv^i\gamma^2\rho=(v^i/c)\mathcal{E} \tag{8-15}$$

が得られる．この式の右辺は $\boldsymbol{v}$ に垂直な単位面積を通り，$\boldsymbol{v}$ の方向に単位時間に通過するエネルギーを c で割ったものである．したがって cT^{0i} はエネルギーの流量といってもよいものである（図 16）．

さて (8-13) で $\nu=0$ とおいてみる．さらに簡単のため $T^{\mu\nu}$ の各成分は $x=x^1$ と x^0 のみに依存し，x^2, x^3 には依らないとしてみる．つまり y, z 方向には全く変化がないとしてみるのである．そのとき (8-13) の左辺は

$$\partial_0T^{00}+\partial_1T^{10} \tag{8-16}$$

である．これをある点のまわりの体積 V について積分する．(8-16) の第1項からは

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int_V T^{00}d^3x=\frac{1}{c}\frac{dE}{dt} \tag{8-17}$$

を得る．ここで

$$E=\int_V T^{00}d^3x=\int_V\mathcal{E}d^3x \tag{8-18}$$

は体積 V の中に含まれる連続体物質の全エネルギーである．次に (8-16) の第2項であるが，これも簡単のために，V は，一つの辺が x 軸に平行な直方体で，x 軸に垂直な壁は $x=a$ と $x=b$ とにあり，ともに単位面積であるとして

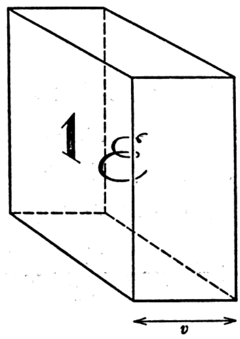


図 16
$\boldsymbol{v}$ に垂直な単位面積を通り，$\boldsymbol{v}$ の方向に単位時間に通過するエネルギーは $\mathcal{E}v$ である．

みよう（図 17).

この場合 (8–16) の第2項をVの中で積分すると（T^{10} は y, z に依らないので，y, z 積分は単に1をかけるだけである）

$$\int_V \frac{\partial T^{10}}{\partial x} dxdydz = \int_a^b \frac{\partial T^{10}}{\partial x} dx = T^{10}(x=b) - T^{10}(x=a) \quad (8\text{–}19)$$

となる．さらにこの点の近くでは $\boldsymbol{v}=(v, 0, 0)$, $v>0$ であるとすると (8–15) に関連して調べたように $T^{10}(x=a)$ は V の左の面から V の中に単位時間に流れこむエネルギーである．同様に $T^{10}(x=b)$ はVの中から，Vの右の面を通って流れ出すエネルギーの割合である．したがって (8–19) はVの中のエネルギーが単位時間に増加する割合のマイナスである．エネルギーが保存されるためには (8–17) は (8–19) のマイナスに等しくなければならない．すなわち

$$\frac{1}{c}\frac{dE}{dt} = T^{10}(x=a) - T^{10}(x=b). \quad (8\text{–}20)$$

ところでこれは任意の a, b について成り立つべきであるから結局

$$\frac{1}{c}\frac{\partial T^{00}}{\partial t} = -\frac{\partial T^{10}}{\partial x} \quad (8\text{–}21)$$

または

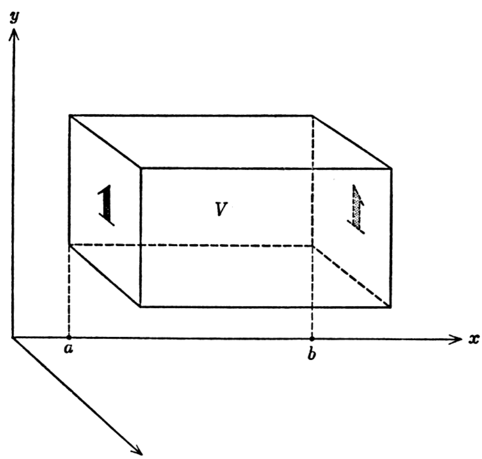


図 17

体積Vはx軸に平行な辺をもつ直方体で，x軸に垂直な面は単位面積である．

$$\partial_0 T^{00} + \partial_1 T^{10} = 0 \tag{8-22}$$

となる．$T^{\mu\nu}$ が y, z にも依存する一般的な場合には (8-22) は

$$\partial_\mu T^{\mu 0} = 0 \tag{8-23}$$

となることが確かめられる．これがエネルギー保存則の別の表現なのである．

ところでエネルギーと運動量とは特殊相対論では一つの4元ベクトルの成分である．したがって $\nu=0$ に対してエネルギー保存則 (8-23) が成り立つならば $\nu=i$ に対しては運動量の保存則として

$$\partial_\mu T^{\mu i} = 0 \tag{8-24}$$

が成り立つはずである．これを導くにはまず

$$A^\nu \equiv \partial_\mu T^{\mu\nu} \tag{8-25}$$

で定義される量は Lorentz 変換に対して4元ベクトルとして変換することを証明し，あとは (6-19) 以下の議論を適用すればよい．これは読者自ら試みてみられたい．

なお (8-18) に対応して

$$P^i = \frac{1}{c}\int_V T^{0i} d^3x \tag{8-26}$$

は体積 V の中に含まれる物質の全運動量を表わす．

第 2 章

重力と慣性

§9 特殊から一般へ

慣性質量と重力質量

特殊相対論を完成した Einstein にはまだ課題が残っていた．Lorentz 変換は慣性系の間の変換であり，もっと一般的な座標変換は全く考えられていない．相対性という概念はもっと一般的に成り立たなければならない．しかし加速度座標系への変換は同時に重力の問題を含むことになる．このことに重点をおいて Newton 力学を復習しておこう．

Newton の運動方程式は

$$m_I \frac{d^2 \boldsymbol{x}}{dt^2} = \boldsymbol{F} \tag{9-1}$$

と書かれるが，ここに現われる質量は，物体の慣性の度合いを表わすものであるので"慣性質量"と呼ばれる．必要なときには添字 $\boldsymbol{I}$ をつけて表わす．

Newton の力学にはもう一つ別の種類の質量が登場する．それは万有引力の法則

$$F=G\frac{m_{1G}m_{2G}}{r^2} \tag{9-2}$$

に現われる質量である．これは物体の慣性とは概念として全く別のものであり，“重力質量”と呼ばれる．普通，添字 G をつけて慣性質量と区別する．(9-2) によれば，地球表面で重力質量 m_G の物体が受ける重力は

$$F=m_G g \tag{9-3}$$

となる．ここで g は，M_G, R を地球の重力質量，半径として

$$g=G\frac{M_G}{R^2} \tag{9-4}$$

で与えられる．

さて (9-1) と (9-3) とを組み合わせると地球上での質点の自由落下の方程式が得られる．簡単のために鉛直方向 z だけを考慮すると

$$m_I\frac{d^2z}{dt^2}=-m_G g \tag{9-5}$$

となる．この式の両辺を m_I で割ると

$$\frac{d^2z}{dt^2}=-\frac{m_G}{m_I}g \tag{9-6}$$

を得る．すなわち自由落下の加速度は比 m_G/m_I に比例する．ところが Galilei の有名な Pisa の斜塔の実験以来，他の摩擦力などがなければ，自由落下の加速度はすべての物体について等しいことが知られている．これは **m_G/m_I がすべての物体について等しい値をもつ**ことを意味する．

斜塔の落下実験はあまり精度のよいものとはいえないであろうが，振子の実験などはもっと精密な測定ということができよう．2種類の質量の比例関係についてはその後さらに正確な実験が行なわれた．特に 19 世紀末から 20 世紀にかけては Eötvös が秀れた実験を行なっている．それによれば m_G/m_I を多くの物体について測定した結果，10^{-9} という実験精度の範囲ですべて同じ値になった．さらにもっと最近の Dicke, Braginski らの測定によると 10^{-12} くらいの精度で m_G と m_I の比例関係が成り立っていることが確認されている．

2種類の質量が正確に比例しているのであれば，その比の値を1に選ぶのが

便利である．もし比の値が1でなかったならば，どちらかの質量測定の目盛を変更して比が1になるようにすればよい．要するにすべての物体について

$$m_G = m_I \tag{9-7}$$

と考えればよいのである．

この比例性は Galilei 以来我々の経験からいえばきわめて当り前のことであって特に不思議とも思われないかもしれない．しかし**本来2種類の質量は全く異なった意味をもつものなのである**．万有引力の式 (9-2) を考えてみよう．これによく似た法則として Coulomb の法則がある．これは電荷をもつ物体の間に働く静電力を与えるもので

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2} \tag{9-8}$$

と書かれる．電荷 q_1, q_2 は電磁的相互作用の強さを表わす“結合定数”でもある．(9-8) と運動方程式 (9-1) を組み合わせると (9-6) に相当する方程式が得られるが，今度は q/m_I という比が現われる．これは物体によって大変異なる値をとる．電子ならばこの比は $e/m_e = 1.60\times10^{-19}/9.11\times10^{-31} = 1.76\times10^{11}$ $\mathrm{C\cdot kg^{-1}}$ であり，陽子ならば $e/m_p = 9.58\times10^7\,\mathrm{C\cdot kg^{-1}}$ となる．また中性子のように電気的に中性な粒子もあり，これに対してはもちろん電気的な力は働かない．しかし重力は働いている．このようにして電気的な力と比べてみると重力がもつ特別な性質を理解することができるであろう．

概念として全く別々の量の間に正確な比例関係，または等価性があるということは単なる偶然ではなく，もっと深い理由があるに違いない．あとで見るように一般相対論はこの理由を与えてくれる理論である．しかしここでは (9-7) を，実験的に確かめられた事実であるとして受け入れ，それから導かれる結論をもう少し一般的な型で考えてみることにしよう．

加速度系

Einstein は一定の加速度で上へ引っ張り上げられつつあるエレベーターの例をよく引き合いに出した．現在ならばロケットの推力によって一定の加速度で上方に打ち上げられつつある宇宙船を思い浮かべる方が現実的であろう．また地球への帰還途中に自由落下しつつある宇宙船も恰好の舞台を提供してくれ

る．もちろんパラシュートを開いたり，逆噴射ロケットを使用しないときの話である．以下，このような宇宙船の中で宇宙飛行士が経験する事柄を考察してみたい．議論を簡単にするために宇宙船の運動は鉛直方向に限られるものとする．

まず一定加速度（一定速度ではない！）αで上昇しつつある場合を考えよう．宇宙船には純が乗っている．彼の座標系，つまり宇宙船に固定した座標系を S′ とする．地上には亮がいて宇宙船の動きを観測している．地上に固定した座標系を S とし，その座標を X^μ で表わす．地球の運動を無視する限り，S は一応慣性系とみなしてよいであろう．

宇宙船の床の運動をSから見ていると

$$Z=\frac{1}{2}\alpha T^2 \tag{9-9}$$

が成り立つ．

宇宙船の中で純は動きまわることができるし，また物を投げたり落としたりしてその運動を観測することができる．宇宙船の床から測った高さを z とし，また時間を t とする．宇宙船の動きはあまり早くはなく，非相対論的なとり扱いで十分であり，したがって

$$t=T \tag{9-10}$$

としてよいことにする．

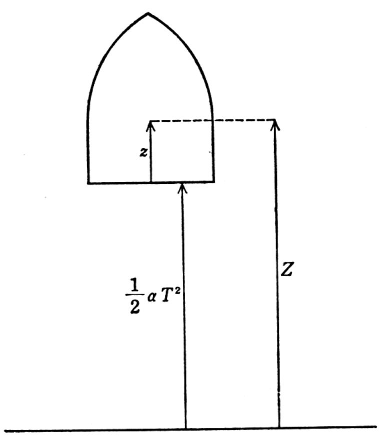


図 18　等加速度αで上昇する宇宙船

図 18 から明らかなように

$$z = Z - \frac{1}{2}\alpha T^2 \tag{9-11}$$

である．これを $T=t$ について2度微分すると

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d^2Z}{dT^2} - \alpha \tag{9-12}$$

となる．一方Sにおいては，地球の重力により

$$\frac{d^2Z}{dT^2} = -g \tag{9-13}$$

であったから (9-12) は

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -\tilde{g} \equiv -(g+\alpha) \tag{9-14}$$

となる．これに m_I をかけると

$$m_I\frac{d^2z}{dt^2} = -m_I g - m_I \alpha \tag{9-15}$$

となり，これが S′ における自由落下の運動方程式である．第2項 $-m_I\alpha$ が仮想的な力，慣性力である．この項をつけ加えなければならないということが，S′ は非慣性系であることを表わしている．

ところで (9-14) を見ると，宇宙船の中ではすべての物体が $\tilde{g}=g+\alpha$ という共通の加速度で床に向かって落ちていくことを示している．また宇宙船の中で静止しているものはすべて $m_I\tilde{g}$ だけの重さをもつように感ずる．これが**すべての物体について同じ値である**ことが重要である．したがって純にとっては，宇宙船が動き出したとき，自分が慣性系に対して α だけの加速度で加速されつつあるのか，それとも地球の重力が突然大きくなったのか，物の自由落下や重さだけ見ていたのでは区別がつかないことになる．

つまり地球による“真の重力”と，慣性力という“見かけの力”とは区別できないのである．実際問題としては地球の重力が突然変化するとはとても考えられないし，また窓の外を見ていればロケットが点火され，宇宙船が地上から上昇し始めたことが見える．それで“常識的に”考えて純は，慣性力が生じたものと判断するであろう．しかし原理的には真の重力と慣性力との区別はこの場合全く存在しないのである．

このような結論に導かれるそもそもの原因は慣性質量と重力質量の等価性(9-7)にある．運動方程式(9-15)の右辺の第1項の質量は元来 m_G であった．もし(9-7)が成り立たないとすると，すなわち二つの物体 A, B について

$$(m_G/m_I)_A \neq (m_G/m_I)_B \qquad (9\text{-}16)$$

であるとすると，S′ における力，または運動を調べることによって $\tilde{g}$ のうちどれだけが g で，どれだけが α かを知ることができることになる．練習問題としてこのことを確かめてみるとよいであろう．

等価原理

以上見てきたように(9-7)を認める限り**真の重力と，座標変換による見かけの慣性力とを区別することは原理的に不可能**である．したがってこの2種類の力は全く同等なものといわなければならない．このことを Einstein は“等価原理”と呼び，重力の最も際立った特徴とみなしたのである．

この等価原理によれば**重力の強さは座標変換によってどんな値にすることもできる**．前の例では mg を $m\tilde{g}=mg+m\alpha$ にしたのであったが，もし

$$\alpha=-g \qquad (9\text{-}17)$$

と選べば

$$\tilde{g}=0 \qquad (9\text{-}18)$$

となってしまう．これは宇宙船がロケットの噴射を止めたとき，または地球に向かって自由落下しつつあるとき，その中では全く重力がないのと同じことになることを表わしている．いわゆる“無重力状態”である．今は簡単のために鉛直方向の運動だけを考えたのであるが，実際には地球のまわりをまわっている宇宙船においても事態は全く同じである．宇宙船が適当な水平速度をもっていれば，円運動または楕円運動がまさに自由落下なのである．円運動の場合についていえば地球による真の重力は，遠心力によって完全に打ち消され，無重力状態が実現しているのである．

このような宇宙船に固定した座標系 S′ は慣性系である．なぜならば宇宙船の中の物体は，初めその中で静止しており，それに別の力を加えない限りいつまでも静止し続けるからである．たとえば宇宙船の中に立っている純が手にも

っているボールから手をそっと離したとする．しかし純もボールも，また宇宙船全体も全く同じ加速度で地球へ向かって落ちていくのであるから純から見ればボールはいつまでも初め手を離した位置に留まっているというわけである．

一般相対性

さて，真の重力と慣性力とが原理的に同じものであるとすると慣性系と非慣性系との差もありえないことになる．いろいろな非慣性系は，それぞれ自分こそ慣性系であり，ただ，真の重力の大きさが違うだけであると主張しても非難することはできないのである．この立場から見れば**慣性系に限らず，あらゆる座標系が同等であり，それらの間に相対性が成り立たねばならない**．これこそ Einstein が目指した一般相対性なのである．Newton によれば慣性系は，あらゆる座標系の中で特別の地位を占め，一種の絶対座標系とされたのであったが，Einstein はこれと反対の立場をとったのである．これは特殊相対論におけるエーテル否定の考えをさらにおし広めたものであった．

一般相対論の基礎概念

これまでの考察を整理すると二つの重要な概念が浮かび上がってくる．これを“原理”の型でまとめてみる．

（I） **一般相対性原理**：力学の（そしてたぶん物理学のすべての）基本法則に関してすべての座標系は同等である．

（II） **等価原理**：適当な座標変換によって重力の大きさをどのようにも変えることができる．特に無重力状態をつくり出すことができる．

実は我々がこれまで議論してきたのは簡単な力学的現象だけである．しかし Einstein は上の二つの原理が力学のみならず，電磁気学を含めて**すべての**物理現象，または物理法則に当てはまるべきものと考えたのである．上の（II）をこのように広い意味で考える場合，特に“強い等価原理”という言葉が使われる．“弱い等価原理”とは力学に限られた場合のことを指す．電磁気学の一般相対論を議論することはこの本の範囲をこえる．したがってこの本で考える等価原理とは弱い意味のものだけである．いずれにしても一般相対論は上の二つの概念を指導原理として建設されるのである．

なおこの節では主として一様な加速度運動をする座標系への変換を例にとって話を進めてきたが，議論はもっと一般的な座標変換に対しても同様である．上の一般相対性原理（I）で考慮すべき座標変換は**完全に任意で一般的なもの**と考える．そのような座標変換は“一般座標変換”と呼ばれる．

§10　曲がった時空

加速度系の時空

特殊相対論によって明らかにされたように，慣性系においては我々の時間，空間は4次元の Minkowski 空間である．この空間は Euclid 空間ではないがやはり“一種の”直交座標で記述される．これを擬 Euclid 空間と呼ぶこともある．議論を進めて加速度系への座標変換を考えるとすると時間，空間の構造はどのようなものになるであろうか．

Lorentz 変換は一次変換であり，この変換によって Minkowski 空間は再び Minkowski 空間に移される．しかし一般に加速度系に移るならば変換は一次変換ではなく，したがって変換後の時空はもちろん Minkowski 空間でな

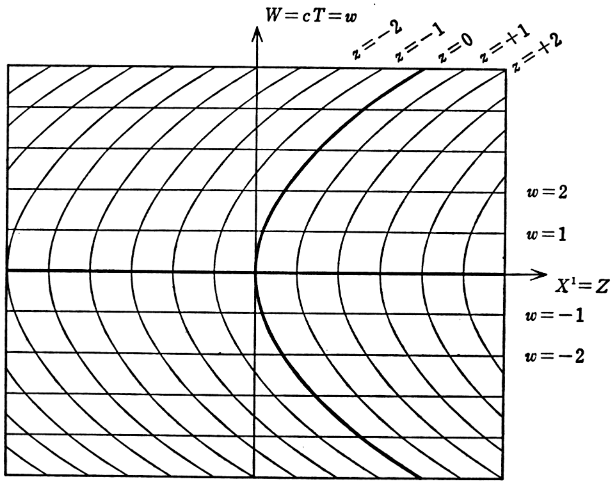


図 19
加速度系への変換（10-1）によって曲線座標に移る．

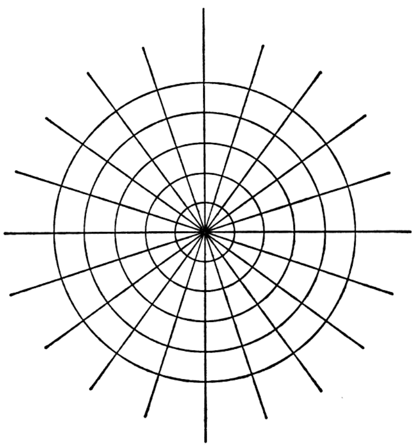
いのみならず，直交空間でもないであろう．さらに直線座標では記述されず，曲線座標を用いなければならなくなるであろう．

前節で考えた宇宙船の例をとり上げてみよう．簡単のために，地上に固定した亮の座標系を慣性系と考えてみる．したがってその時空は Minkowski 時空であるとする．ここで (9-10), (9-11) で表わされる座標変換を行なって宇宙船に固定した純の座標系に移る．

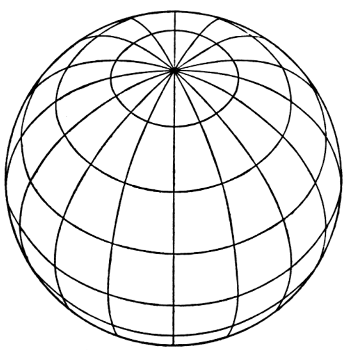
$$\begin{cases} X^1 = x^1 \\ X^2 = x^2 \\ X^3 = x^3 + \dfrac{1}{2}\dfrac{\alpha}{c^2}(x^0)^2 \\ X^0 = x^0. \end{cases} \tag{10-1}$$

この中で特に $z = x^3$ と $t = x^0/c$ に注目しよう．(10-1) の最後の2式は，同じ世界点を表わすのに直交座標ではなく，曲線座標を使うことを意味している (図 19)．この例から推察されるように，加速度系における時空は一般に曲線座標で表わされる．

しかしこれについてはもう一つ立ち入った考慮が必要である．上に調べた例では，曲線座標を使うとはいっても，結局直交座標で表現し直すことができるものであった．数学でよく知られた例でいえば，2次元空間，つまり平面の極



(a)　平面の極座標



(b)　球面座標

図 20

座標のようなものである（図 20（a））．しかし曲線座標の中には，本質的に直交座標では表わせないものがある．たとえば球面を二つの変数で表わす場合である（図 20（b））．地球の表面は緯度線と経度線（子午線）でおおうことができるが，この面は決して平面に帰着させることはできない．円周率は π より小さく，三角形の内角の和は 180° より大きい．平行な 2 線は交わる．このような面の幾何学は本質的に非 Euclid 的である．

球面が平面に帰着できないということを最も端的に表わすのは曲率という量である．球面の場合，これは球の半径の逆数で与えられる．曲率のある面は曲がった面といわれる．曲面の幾何学の一般的な枠組は Riemann 幾何学によって与えられる．面は普通の意味の 2 次元的な面でなくてもよい．任意の次元数の“超曲面”でもかまわない．このように本質的に曲がった面，または空間は**一様でない**重力が存在する場合の時空として特に重要である．この事情をうかがい知るために，自由落下する宇宙船の例をもう一度考えてみよう．

一様でない重力場

自由落下する宇宙船に固定した座標系 S′ では確かに重力がない．もし重力がどこも一様であるとすれば，すなわちどこでも同じ Z 軸の下向きで大きさも同じならば，S′ への座標変換によって世界中すべての点で重力をなくしてしまうことができる．しかし実際には地球の重力は一様でない．高度による変化を無視しうるように地球の表面近くだけに限るとしても，地球全体から見れば重力の方向は場所によって著しく異なる．どの場所でも重力は地球の中心を向いているのである（図 21）．

いま，純の宇宙船は北極点にあるとしよう．慣性系 S の Z 軸は地軸の方向で“上向き”である．座標変換（10–1）によって z 軸は Z 軸と同じに保たれる．その z 軸は，たとえば赤道上の点では水平北向きであり，地球の中心への方向とは直角をなしている．この地点では S′ は南の方へ水平に加速されるのであり，これでは重力は打ち消されない．南極では S′ は**真上の方向に** g の大きさで加速されつつある座標系である．この場合，S′ ではすべての物体の重さは静止のときの 2 倍になることになる．

厳密にいえば北極点上の宇宙船の中でさえ重力は完全にはなくならない．純

は北極点の真上にいるので彼が感ずる重力は完全に消失しているが，彼が腕をのばして手の先のボールを離したとすると，そのボールは何の力も加えないのに純の方に“水平方向に”近寄ってくる．なぜならばボールは地球の中心へ向かって落下しており，その方向は純が落下する方向とわずかではあるが異なり，そのため両者の間隔は次第にせまくなるからである（図 22）．

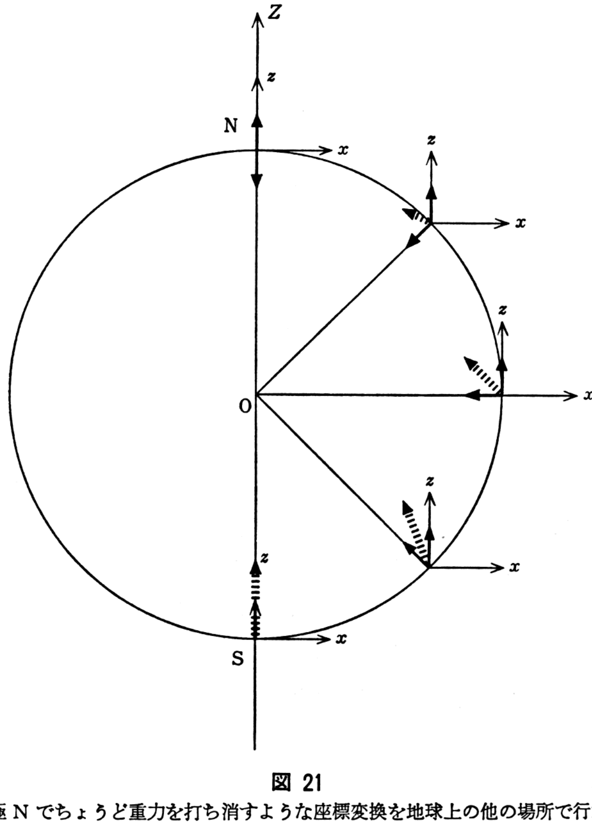


図 21

北極 N でちょうど重力を打ち消すような座標変換を地球上の他の場所で行なっても重力は打ち消されない．地球中心 O に向かう太い矢印は真の重力，（図で）真上向きの太い矢印は慣性力．その合力は太い点線の矢印で示されている．

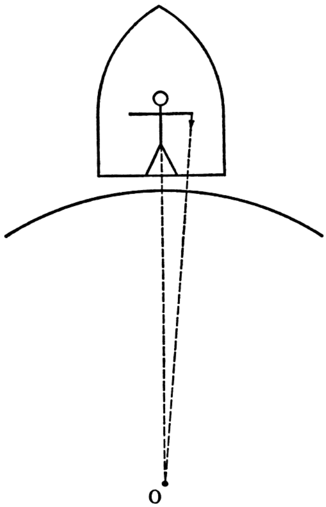


図 22
自由落下する宇宙船の中でも完全に無重力にはならない.

曲がった空間

このように座標変換によって重力を消し去ることができるのはある点の“近傍”に限られる．この事情を表わすのに，重力を“局所的に”消すことができるという表現を使う．これに対して，もし重力が一様であるならば“大域的に”重力を打ち消すことができるという．この観点から前節（p. 61）の等価原理の表現をもう少し精密にしておこう．

（II′）**等価原理**：適当な座標変換によって局所無重力系に移ることができる†.

先ほどの地球の問題に戻ろう．もちろん地球表面上のどの点においても，その近傍の重力を打ち消す座標変換を行なうことができる．つまり各地で，それぞれ地球の中心へ向かって自由落下する座標系に乗り移ればよいのである．ただある地点の自由落下座標系を他の地点の同様な座標系に重ね合わせることが

† このような座標系は“局所慣性系”とも呼ばれる．これに対して Newton の意味での慣性系は大域的である．

できないということである．これはちょうど，各地域の５万分の１地形図をつなぎ合わせようとするときの困難と似ている．各地形図は平面に書かれている．しかしこれを次々に貼り合わせていくと一つの平面にはおさまらなくなる．それは球面の上に貼らなくてはならないのである．厳密にいえば１枚１枚の西の辺と東の辺とは普通の意味で平行ではない．局所的には平らなものを集めても全体として平らにならないのは地球の表面が曲がっているからである

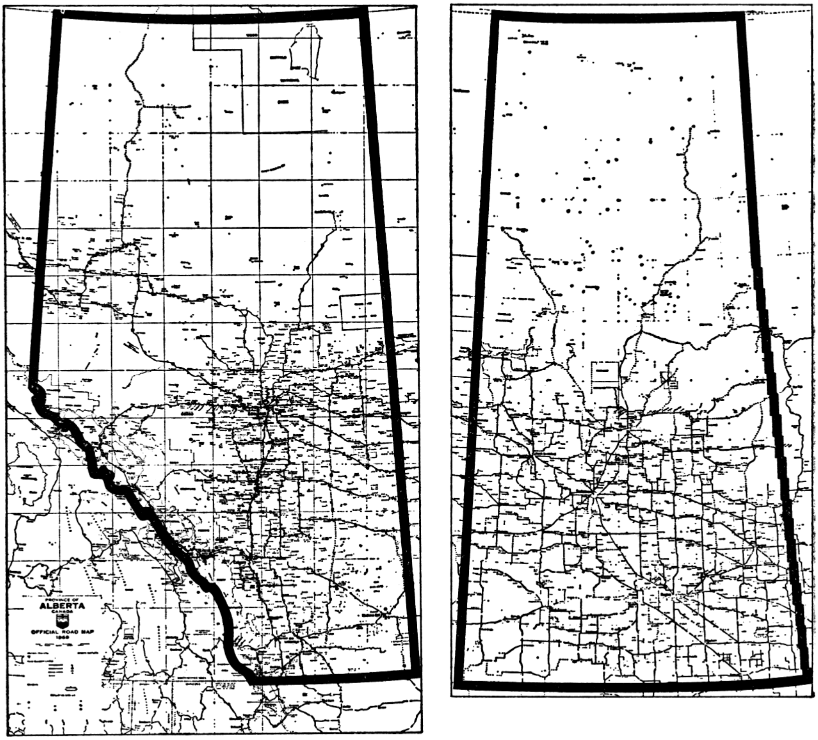


図 23 カナダ西部の Alberta 州と Saskatchewan 州の地図

両州とも南は北緯 49°，北は北緯 60° で区切られている．東西の境界は，一部を除いて西経 102°，110°，120° という子午線である．このように北の方が南の方より明らかにせまくなっている各州の地図を貼り合わせていってもカナダ全体の地図をピッタリとつくることはできない．

Saskatchewan 州の東端の南半分には規則的なギザギザが見られる．これは，この州では土地の区画をすべて正方形をもとにして行なったためのしわ寄せである．高緯度の大平原の国では農地の境界線を引くにも地球の丸みを忘れるわけにはいかないのである．

(図 23).

局所無重力系はつくれても大域的な無重力系はつくれないということは，**重力が存在すると時空間が曲がっている**という考え方を示唆する．すなわち重力が存在する時空を記述するには Riemann の幾何学を使わなければならないことが予想されるであろう．擬 Euclid 幾何学で表わすことのできる Minkowski 空間の曲率はゼロで，したがって“平らな”空間（時空）と呼ばれ，ちょうど“平らな”5万分の1地形図に対応している．重力があると時空は平らではなくなり，4次元の曲がった空間になるのである†.

さてこれまでは“真の重力”として地球の重力の例ばかりを考えてきた．その重力は確かに大域的に一様ではなく，いかにも空間の曲率と関係がありそうであった．しかしもっと一般的な場合はどうであろうか．そもそも真の重力とは物質によってつくり出されるものであり，この点は Newton でも Einstein でも同じである．物質の分布が一様でない限り真の重力も一様ではなく，したがって**曲率を伴う**．これに反して座標変換によって生ずる**見かけの重力である慣性力は空間の曲率を伴わない**．このことは後に学ぶ一般相対論において厳密に定式化される．

この意味で，慣性力と真の重力との等価性は完成した一般相対論の立場からいえば再びくずれることになる．

61 ページに述べた“素朴な”等価原理（II）を修正して 66 ページの（II′）にしたのはこのような事情の伏線なのである．

このようにして一般座標変換と重力の関係がおおよそ理解できたであろう．また Riemann 幾何学の必要性もおぼろげながらつかめたであろう．次章では Riemann 幾何学を学び，その後 Einstein の理論に進もう．

---

† 平らな空間という表現は明らかに2次元的な平面からきている．したがって3次元以上の空間を平らとか平担というのは普通の感覚としてはおかしいかもしれない．本当は Euclid 的，または擬 Euclid 的というべきであるが，2次元 Euclid 空間が平担であることの拡張として，4次元でも5次元でも平らな空間と呼ぶことが多い．“平ら”に対して，“曲がった”という形容詞も全く同じ使われ方をする．

第 3 章

Riemann 幾何学

§11 斜交座標

線素と計量テンソル

直交座標でない座標系の中で最も簡単なものは斜交座標である．たとえば2次元の直交座標 $X=X^1$, $Y=X^2$ に対して 45° の線を y 軸に選び，x 軸はもとの X 軸に一致させておく．図 24 からわかるように同じ点 P の座標に対して

$$\begin{cases} x^1=x=X-Y \\ x^2=y=\sqrt{2}\,Y \end{cases} \tag{11-1}$$

が成り立つ．逆の関係式は

$$\begin{cases} X=x+y/\sqrt{2} \\ Y=y/\sqrt{2} \end{cases} \tag{11-2}$$

である．

X, Y 軸方向の“単位ベクトル” $\boldsymbol{e}_X$, $\boldsymbol{e}_Y$ を導入しておくと便利である（図25）．XY 成分を書くと

$$\boldsymbol{e}_X=(1,0), \qquad \boldsymbol{e}_Y=(0,1) \tag{11-3}$$

である．また斜交座標系の x, y 軸方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$ と書く．その直交座標系での成分を書くと

$$\boldsymbol{e}_x=(1,0), \qquad \boldsymbol{e}_y=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \tag{11-4}$$

となる．この $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$ はそれぞれ規格化されているが，互いに直交ではない．

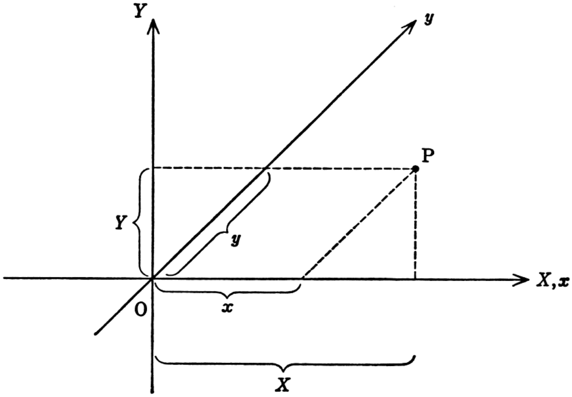


図 24　2次元の斜交座標

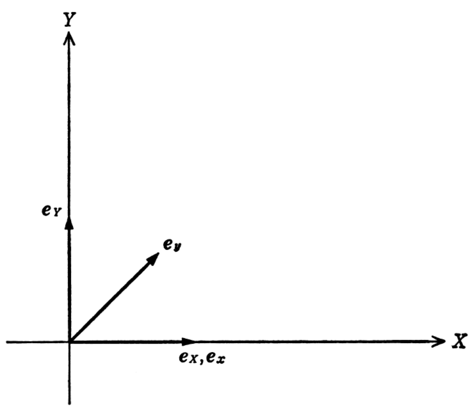


図 25　単位ベクトルの組

実際

$$(\boldsymbol{e}_x\cdot\boldsymbol{e}_y)=\frac{1}{\sqrt{2}} \tag{11-5}$$

である．

次に無限小線素を考えよう．座標 X, Y をもつ点 P に非常に近い点 Q をとり，その座標を $X+dX, Y+dY$ とする．PQ 間の距離 ds は

$$(ds)^2=(dX)^2+(dY)^2 \tag{11-6}$$

で与えられる．これを斜交座標系で表わすとどうなるであろうか．点 P の斜交座標を x, y とし，点 Q のそれを $x+dx, y+dy$ とするとき，次のように計算するとよい．(11-2) から

$$dX=dx+\frac{1}{\sqrt{2}}dy, \qquad dY=\frac{1}{\sqrt{2}}dy \tag{11-7}$$

を導き†，(11-6) に代入すると

$$\begin{aligned}(ds)^2&=\left(dx+\frac{1}{\sqrt{2}}dy\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}dy\right)^2\\&=(dx)^2+\sqrt{2}\,dxdy+(dy)^2\end{aligned} \tag{11-8}$$

となる．これは dx, dy について“双一次型式”である．これを

$$(ds)^2=g_{xx}(dx)^2+2g_{xy}dxdy+g_{yy}(dy)^2 \tag{11-9}$$

と書くことにする．(11-8) と比べると

$$g_{xx}=1, \qquad g_{xy}=g_{yx}=\frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad g_{yy}=1 \tag{11-10}$$

を得る．また

$$g_{11}=g_{xx}, \qquad g_{12}=g_{xy}, \qquad g_{21}=g_{yx}, \qquad g_{22}=g_{yy} \tag{11-11}$$

と書いて行列の型にまとめると

$$g_{\mu\nu}=\begin{pmatrix}g_{11} & g_{12}\\ g_{21} & g_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{2} & 1\end{pmatrix} \tag{11-12}$$

となる．これは“対称行列”である．

(11-9) のように無限小線素を dx などの双一次型式で書いたときの係数 $g_{\mu\nu}$

---

† P点の座標を X_P, Y_P ; x_P, y_P, Q点の座標も同様に書くとき

$$X_P-X_Q=(x_P+y_P/\sqrt{2})-(x_Q+y_Q/\sqrt{2})=(x_P-x_Q)+(y_P-y_Q)/\sqrt{2}.$$

Q→P とすると (11-7) の第1式を得る．第2式も同様．

を“計量テンソル”，または単に“計量”と呼び，これからの議論で中心的な役割を果たすことになる．

もちろん直交座標系における式 (11-6) も同じような型に書くことができる．直交座標系における計量を特にバーをつけて書くことにすると

$$\bar{g}_{\mu\nu}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \tag{11-13}$$

であることはすぐにわかる．これは (3-21) と同じ種類のものであり，Kronecker のデルタ記号を用いて

$$\bar{g}_{\mu\nu}=\delta_{\mu\nu} \tag{11-14}$$

と書ける．斜交座標における計量 (11-12) は，非対角成分 $g_{12}=g_{21}$ がゼロでないという点で (11-13) と著しく異なっている．さらに (11-5) と (11-12) を比べてみると

$$(\boldsymbol{e}_\mu\cdot\boldsymbol{e}_\nu)=g_{\mu\nu} \tag{11-15}$$

が成り立っていることがわかる．これは実はいま考えている実例に限らず，一般の斜交座標で常に成り立つ重要な関係式である．

ベクトルの成分

直交座標系ではベクトル $\boldsymbol{A}$ の成分 A_X, A_Y は単位ベクトル $\boldsymbol{e}_X$, $\boldsymbol{e}_Y$ を使って

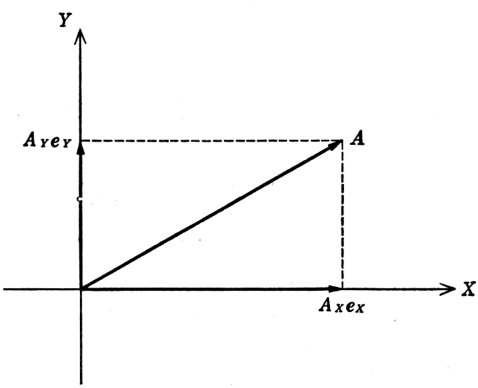


図 26　直交座標におけるベクトルの成分

$$A_X=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e}_X),\qquad A_Y=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e}_Y) \tag{11-16}$$

と表わされ，さらにもともとのベクトル $\boldsymbol{A}$ は，X 軸方向のベクトル $A_X\boldsymbol{e}_X$ と，Y 軸方向のベクトル $A_Y\boldsymbol{e}_Y$ との和に他ならない．

$$\boldsymbol{A}=A_X\boldsymbol{e}_X+A_Y\boldsymbol{e}_Y. \tag{11-17}$$

同じことが斜交座標系でも成り立つであろうか．

(11-16) にならって成分 A_x, A_y を

$$A_x=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e}_x),\qquad A_y=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e}_y) \tag{11-18}$$

によって定義してみよう．その幾何学的な意味は図 27 から明らかであろう．ここで (11-17) を (11-18) に代入してみると

$$\begin{cases} A_x=A_X(\boldsymbol{e}_X\cdot\boldsymbol{e}_x)+A_Y(\boldsymbol{e}_Y\cdot\boldsymbol{e}_x) \\ A_y=A_X(\boldsymbol{e}_X\cdot\boldsymbol{e}_y)+A_Y(\boldsymbol{e}_Y\cdot\boldsymbol{e}_y). \end{cases} \tag{11-19}$$

さらに (11-4) からは

$$\begin{cases} (\boldsymbol{e}_X\cdot\boldsymbol{e}_x)=1, \qquad (\boldsymbol{e}_Y\cdot\boldsymbol{e}_x)=0, \\ (\boldsymbol{e}_X\cdot\boldsymbol{e}_y)=1/\sqrt{2}, \qquad (\boldsymbol{e}_Y\cdot\boldsymbol{e}_y)=1/\sqrt{2} \end{cases} \tag{11-20}$$

が得られる．これを (11-19) に代入すると

$$A_x=A_X,\qquad A_y=\frac{1}{\sqrt{2}}A_X+\frac{1}{\sqrt{2}}A_Y \tag{11-21}$$

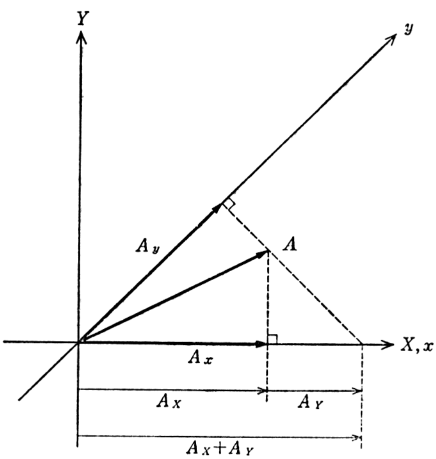


図 27 斜交座標におけるベクトルの共変成分

となる．この関係式の幾何学的な意味も図 27 に示してある．ところがこのような成分 A_x, A_y を使って (11-17) の右辺のように $A_x\boldsymbol{e}_x+A_y\boldsymbol{e}_y$ をつくっても $\boldsymbol{A}$ にならないことは，やはり図 27 からすぐにわかる．(11-17) のような式が斜交座標系でも成り立つようなベクトルの成分は存在しないのであろうか．実はそのような成分は次のようにしてつくることができるのである．

まず計量テンソル (11-12) の“逆行列”をつくり，それを $g^{\mu\nu}$ と書くことにする．逆行列という意味は $g^{\nu\lambda}$ が

$$g_{\mu\nu}g^{\nu\lambda}=\delta_\mu{}^\lambda \tag{11-22}$$

を満たすということである．ここで以前特殊相対論の所で述べたように縮約の規則に従って ν という添字については和をとるのである (いまの例では 1, 2). また右辺の $\delta_\mu{}^\lambda$ はやはり Kronecker の記号で，$\mu=\lambda$ ならば 1，そうでなければゼロである．(11-22) をもっと具体的に書くと

$$\begin{cases} g_{11}g^{11}+g_{12}g^{21}=1, & g_{11}g^{12}+g_{12}g^{22}=0 \\ g_{21}g^{11}+g_{22}g^{21}=0, & g_{21}g^{12}+g_{22}g^{22}=1 \end{cases} \tag{11-23}$$

である．これを $g^{\mu\nu}$ について解くと

$$g^{\mu\nu}=\frac{1}{g}\begin{pmatrix} g_{22} & -g_{12} \\ -g_{21} & g_{11} \end{pmatrix} \tag{11-24}$$

となる．ここで g は $g_{\mu\nu}$ の行列式で

$$g=\det(g_{\mu\nu})\equiv g_{11}g_{22}-g_{12}g_{21} \tag{11-25}$$

である．実際 (11-24), (11-25) のようにおくと (11-23) が満たされることはすぐに確かめられる．(11-12) の例に対しては

$$g=\frac{1}{2}, \qquad g^{\mu\nu}=\begin{pmatrix} 2 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix} \tag{11-26}$$

となる．

この $g^{\mu\nu}$ を用い，(11-18) で定義した成分 A_μ から†

$$A^\mu\equiv g^{\mu\nu}A_\nu \tag{11-27}$$

という量をつくってみる．詳しく書くと

† (11-18) では A_x, A_y と書いたが，これらを A_1, A_2 と書くこともある．上に添字のついた量についても同様で，$A^1=A^x$, $A^2=A^y$ 等と書く．

$$\begin{cases} A^x = g^{11}A_x + g^{12}A_y \\ A^y = g^{21}A_x + g^{22}A_y \end{cases} \tag{11-28}$$

である．(11-26) を使い，さらに (11-21) を代入すると

$$A^x = A_X - A_Y, \qquad A^y = \sqrt{2}\, A_Y \tag{11-29}$$

となる．この関係の幾何学的な意味は図 28 に説明してある．今度は (11-17) と同じ型の関係式

$$\boldsymbol{A} = A^x \boldsymbol{e}_x + A^y \boldsymbol{e}_y \tag{11-30}$$

が成り立っている．この式は縮約の規則に従って

$$\boldsymbol{A} = A^\mu \boldsymbol{e}_\mu \tag{11-31}$$

という型にまとめられる．

このように斜交座標系では**ベクトルの成分に 2 種類のものを考えなくてはならない**．添字が下にある A_μ をベクトル $\boldsymbol{A}$ の“共変成分”，または単に“共変ベクトル”と呼び，上つきの添字のある A^μ を“反変成分”，または“反変ベクトル”と呼ぶ．

直交座標系では計量が単位行列 (11-13) である．したがって逆行列 $\bar{g}^{\mu\nu}$ も簡単で

$$\bar{g}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{11-32}$$

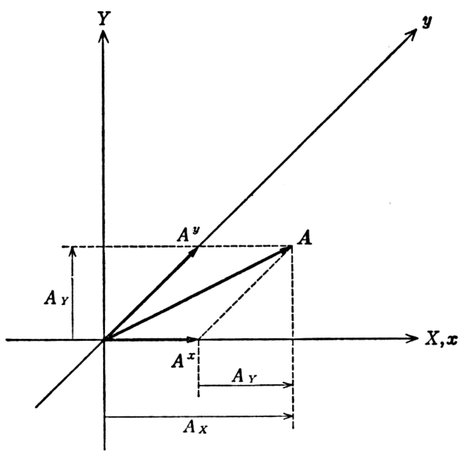


図 28 斜交座標におけるベクトルの反変成分

である．このために (11-27) は $A^{\mu}=A_{\mu}$ となり，2種類の成分には全く区別がない†．(11-17) も本当は (11-31) の型に書くべきなのであった．

このことを使って (11-29) を書き直すと

$$A^{x}=A^{X}-A^{Y},\qquad A^{y}=\sqrt{2}\,A^{Y} \tag{11-33}$$

となる．これは座標変換の式 (11-1) と全く同じ型であることに注意してほしい．つまり**反変ベクトルとは座標と同じ変換を受けるベクトル**といってよい．ところが共変ベクトルの方は一般に座標とは異なった変換を受ける．いまの例でいえば (11-21) がそれを示している．このような2種類のベクトルの存在は次に述べる曲線座標においてはさらに重要な概念となる．

§12 曲線座標

線素と計量

曲線座標の中で最も簡単であり，しかも重要な特徴を数多く具えているものは2次元空間の中の極座標であろう．この節では主としてこの実例について詳しく調べ，それから一般的な結果を類推することにしよう．

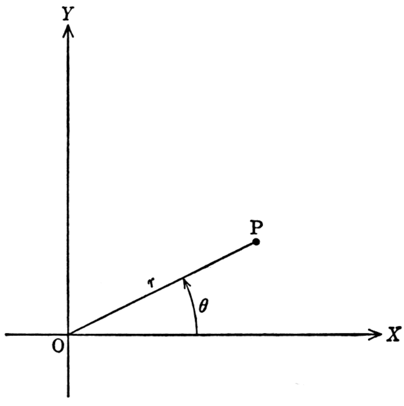


図 29　2次元の極座標

† §3 で議論した Minkowski 空間は斜交系ではないが完全な Euclid 空間でもないので $A^{\mu}=A_{\mu}$ ではない．$g_{\mu\nu}$ は (3-18) で与えられる $\eta_{\mu\nu}$ である．これの逆行列 $\eta^{\mu\nu}$ は (3-18) と全く同じである．したがって $A^0=-A_0$, $A^1=A_1$, $A^2=A_2$, $A^3=A_3$ である．この記法によれば (5-10) は $u_{\mu}u^{\mu}=-1$ となり，また (6-6) は $p_{\mu}p^{\mu}=-m^2c^2$ と書かれる．

2次元空間内の一点 P を表わす直交座標を $X=X^1$, $Y=X^2$ とし，同じ点を原点 O からの距離 $r=x^1$ と，OP が X 軸となす角 $\theta=x^2$ で表わすのが極座標である（図 29）．二つの座標系の間の変換式は

$$X=r\cos\theta,\qquad Y=r\sin\theta \tag{12-1}$$

およびその逆

$$r=\sqrt{X^2+Y^2},\qquad \theta=\tan^{-1}(Y/X) \tag{12-2}$$

で表わされる．

次に斜交座標のときと同様に無限小線素を考えよう．点 $P(X, Y)$ と点 $Q(X+dX, Y+dY)$ の間の距離 ds は

$$(ds)^2=(dX)^2+(dY)^2 \tag{12-3}$$

で与えられるが，これを極座標で表わしてみよう．それには (11-7) と同じ方法をとる．もう少し一般的にいえば，X, Y をそれぞれ r, θ の関数と考え，次のような微分式を考える．

$$\begin{cases} dX=\dfrac{\partial X}{\partial r}dr+\dfrac{\partial X}{\partial \theta}d\theta \\[2ex] dY=\dfrac{\partial Y}{\partial r}dr+\dfrac{\partial Y}{\partial \theta}d\theta \end{cases} \tag{12-4}$$

これを (12-3) に代入すると

$$\begin{aligned}(ds)^2=&\left[\left(\frac{\partial X}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial Y}{\partial r}\right)^2\right](dr)^2+2\left(\frac{\partial X}{\partial r}\frac{\partial X}{\partial \theta}+\frac{\partial Y}{\partial r}\frac{\partial Y}{\partial \theta}\right)drd\theta\\ &+\left[\left(\frac{\partial X}{\partial \theta}\right)^2+\left(\frac{\partial Y}{\partial \theta}\right)^2\right](d\theta)^2\end{aligned} \tag{12-5}$$

となる．これを (11-9) と同じように，やはり dr と $d\theta$ の双一次型式とみなして

$$(ds)^2=g_{rr}(dr)^2+2g_{r\theta}drd\theta+g_{\theta\theta}(d\theta)^2=g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \tag{12-6}$$

と書くと，計量 $g_{\mu\nu}$ は次のようになる．

$$\begin{cases} g_{11}=g_{rr}=\left(\dfrac{\partial X}{\partial r}\right)^2+\left(\dfrac{\partial Y}{\partial r}\right)^2 \\[2ex] g_{22}=g_{\theta\theta}=\left(\dfrac{\partial X}{\partial \theta}\right)^2+\left(\dfrac{\partial Y}{\partial \theta}\right)^2 \\[2ex] g_{12}=g_{21}=g_{r\theta}=g_{\theta r}=\dfrac{\partial X}{\partial r}\dfrac{\partial X}{\partial \theta}+\dfrac{\partial Y}{\partial r}\dfrac{\partial Y}{\partial \theta} \end{cases} \tag{12-7}$$

具体的に (12-1) を用いて計算すると

$$dX = \cos\theta dr - r\sin\theta d\theta, \qquad dY = \sin\theta dr + r\cos\theta d\theta \tag{12-8}$$

$$(ds)^2 = (dr)^2 + r^2(d\theta)^2 \tag{12-9}$$

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix} \tag{12-10}$$

となる．もちろん (12-9) のような結果はもっと直観的な方法で導くこともできる（図 30).

計量 (12-10) は斜交座標の場合の (11-12) と比べてみると，g_{22} が定数でなく r の関数であるという点で大きく異なっている．これは曲線座標の一般的な性質である．**一般に計量は場所の関数であり**，計量の全部の成分が定数であるのは直線座標に限られる†.

(12-10) では $g_{12} = g_{21} = 0$ である．しかしもっと一般的な曲線座標では非対角要素もゼロではなくなる．いま考えている極座標はこの点で少し簡単すぎるのが実例としての欠陥といえるかもしれない.

計量を求める式 (12-7) の規則性を明らかにするためには次のように書くとよい.

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\lambda\tau} \frac{\partial X^\lambda}{\partial x^\mu} \frac{\partial X^\tau}{\partial x^\nu} \tag{12-11}$$

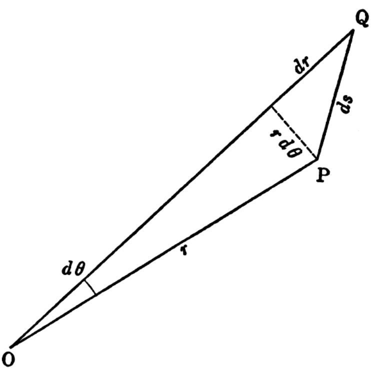


図 30　線素 $(ds)^2 = (dr)^2 + r^2(d\theta)^2$ の説明

† 直交座標，Minkowski 空間のような擬 Euclid 空間での Lorentz 座標，および斜交座標を総称して "直線座標" と呼ぶ.

ここで $\bar{g}_{\lambda\tau}=\delta_{\lambda\tau}$ は直交座標における計量である．(12-11) の型に書いておけば結果は2次元の極座標という特別な場合に限定されない一般的なものであることが想像されよう．任意の次元数の直交座標 X^{μ} があり，それから任意の曲線座標 x^{μ} が導かれるとき，無限小線素は (12-6) の第2式で表わされ，計量は (12-11) で与えられる．出発点となる直線座標は直交座標である必要はない．特に一般相対論で重要になるのは $\bar{g}_{\mu\nu}$ が (3-18) の Minkowski 計量 $\eta_{\mu\nu}$ で与えられる場合である．

基　底

直交座標系における単位ベクトルについては前節で考えたが，それは直交規格化条件 $(\boldsymbol{e}_{\mu}\cdot\boldsymbol{e}_{\nu})=\delta_{\mu\nu}$ を満たしている．ところで $\delta_{\mu\nu}$ は直交座標における計量に他ならないから

$$(\boldsymbol{e}_{\mu}\cdot\boldsymbol{e}_{\nu})=\bar{g}_{\mu\nu} \tag{12-12}$$

と書くことができる．このような単位ベクトルの考え方を曲線座標にも拡張してみよう．

ベクトル $\boldsymbol{e}_{\mu}$ の ν 番目の成分を $e_{\mu}{}^{\nu}$ と書くことにする．直交座標では (11-3) から推測されるように

$$e_{\mu}{}^{\nu}=\delta_{\mu}{}^{\nu} \tag{12-13}$$

である．これはさらに

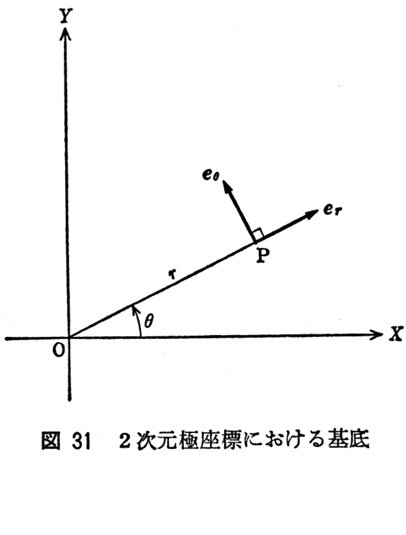


図 31　2次元極座標における基底

$$e_\mu{}^\nu = \frac{\partial X^\nu}{\partial X^\mu} \tag{12-14}$$

と書くこともできる．

さてまた 2 次元空間の例に戻ろう．極座標では動径方向の単位ベクトル $\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_r$ と，それに直交する $\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_\theta$ を考えたいところである（図 31）．まず $\boldsymbol{e}_r$ の X 成分は $(\boldsymbol{e}_X \cdot \boldsymbol{e}_r)$ であるが，これを $e_r{}^X$ のように書くと，図 31 から

$$e_r{}^X = \cos\theta \tag{12-15}$$

である．同様に $\boldsymbol{e}_r$ の Y 成分は

$$e_r{}^Y = \sin\theta \tag{12-16}$$

であることがすぐにわかる．ところで (12-1) によるとこれらは

$$e_r{}^X = \frac{\partial X}{\partial r}, \qquad e_r{}^Y = \frac{\partial Y}{\partial r} \tag{12-17}$$

と書くこともできる．これは点 P において，θ を固定して r のみ増加させた場合に点 P が移動する方向を表わすベクトルといってもよい．

これにならって $\boldsymbol{e}_\theta$ の成分を

$$e_\theta{}^X = \frac{\partial X}{\partial \theta} = -r\sin\theta, \qquad e_\theta{}^Y = \frac{\partial Y}{\partial \theta} = r\cos\theta \tag{12-18}$$

によって定義してみよう．これによれば $\boldsymbol{e}_\theta$ は確かに $\boldsymbol{e}_r$ に直交し，しかも θ の増す方向を向いていることが図 31 からすぐにわかる．ただし $\boldsymbol{e}_\theta$ の大きさは 1 ではない．

$$(\boldsymbol{e}_\theta)^2 = (-r\sin\theta)^2 + (r\cos\theta)^2 = r^2 \tag{12-19}$$

これを

$$(\boldsymbol{e}_r)^2 = 1, \qquad (\boldsymbol{e}_r \cdot \boldsymbol{e}_\theta) = 0 \tag{12-20}$$

とまとめると（$\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_r$, $\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_\theta$ として）

$$(\boldsymbol{e}_\mu \cdot \boldsymbol{e}_\nu) = g_{\mu\nu} \tag{12-21}$$

となる．ここで $g_{\mu\nu}$ は (12-10) で与えられる計量である．これは直交座標の場合の (12-12) の自然な拡張になっており，単純な直交規格化条件に代わるものである．さらに (12-17), (12-18) をもう少し一般的な型に直すと

$$e_\mu{}^\nu = \frac{\partial X^\nu}{\partial x^\mu} \tag{12-22}$$

となり，(12-14) の拡張であることがわかる．(12-22) で定義される $e_\mu{}^\nu$ が

(12-21) を満たすことは，(12-11) を使って一般に証明できる．このようなベクトル $\boldsymbol{e}_\mu$ の組のことを“基底”と呼ぶことにする．

ベクトルの成分

基底を用いてベクトル $\boldsymbol{A}$ の成分を表わしてみよう．直交座標の場合の (11-16) にならって $\boldsymbol{A}$ の共変成分を

$$A_1=A_r=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e}_r), \qquad A_2=A_\theta=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e}_\theta) \tag{12-23}$$

で定義してみよう．ここで (11-17) を代入し，さらに $(\boldsymbol{e}_X\cdot\boldsymbol{e}_r)$ 等に (12-17), (12-18) を使うと

$$\begin{cases} A_r=\dfrac{\partial X}{\partial r}A_X+\dfrac{\partial Y}{\partial r}A_Y \\ A_\theta=\dfrac{\partial X}{\partial \theta}A_X+\dfrac{\partial Y}{\partial \theta}A_Y \end{cases} \tag{12-24}$$

を得る．(12-15), (12-16), (12-18) などの具体的な型を用いると

$$A_r=A_X\cos\theta+A_Y\sin\theta, \qquad A_\theta=r(-A_X\sin\theta+A_Y\cos\theta) \tag{12-25}$$

となる．

これを見ると A_r は $\boldsymbol{A}$ を普通の意味で $\boldsymbol{e}_r$ の方向に射影したものであるが，A_θ は少し異なることがわかる．つまり A_θ は $\boldsymbol{e}_\theta$ の方向に普通の意味で射影したものに r をかけたものになっている．したがって A_X, A_Y とは次元も異なることになる．これは，たとえば力学で，運動量の能率＝角運動量が運動量とは長さの次元だけ異なっているのと同じような事情である．解析力学における一般化座標の考えの中にも同様のことが含まれている．

(12-25) を逆に A_X, A_Y について解くと

$$A_X=A_r\cos\theta-\frac{1}{r}A_\theta\sin\theta, \qquad A_Y=A_r\sin\theta+\frac{1}{r}A_\theta\cos\theta \tag{12-26}$$

が得られる．これが

$$\begin{cases} A_X=\dfrac{\partial r}{\partial X}A_r+\dfrac{\partial \theta}{\partial X}A_\theta \\ A_Y=\dfrac{\partial r}{\partial Y}A_r+\dfrac{\partial \theta}{\partial Y}A_\theta \end{cases} \tag{12-27}$$

のように表わされることもわかるであろう．すなわち (12-2) から

$$\begin{cases} \dfrac{\partial r}{\partial X}=\cos\theta, & \dfrac{\partial\theta}{\partial X}=-\dfrac{1}{r}\sin\theta \\ \dfrac{\partial r}{\partial Y}=\sin\theta, & \dfrac{\partial\theta}{\partial Y}=\dfrac{1}{r}\cos\theta \end{cases} \tag{12-28}$$

が確かめられるからである．(12-24) と (12-27) の間の類似点と相違点に注意してほしい．

次に前節と同様に反変ベクトルを導入しよう．そのためには $g_{\mu\nu}$ の逆行列として $g^{\mu\nu}$ を定義する．2次元極座標の例では (12-10) に見るように $g_{\mu\nu}$ が対角的であるので $g^{\mu\nu}$ も簡単に求められる．

$$g^{\mu\nu}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/r^2 \end{pmatrix} \tag{12-29}$$

これを用いて (11-27) と同じ式 $A^\mu=g^{\mu\nu}A_\nu$ によって反変ベクトルを定義する．いまの例では

$$\begin{cases} A^1=A^r=A_r=A_1 \\ A^2=A^\theta=\dfrac{1}{r^2}A_\theta=\dfrac{1}{r^2}A_2 \end{cases} \tag{12-30}$$

となる．これに (12-25) を代入し，さらに $A^X=A_X$, $A^Y=A_Y$ を使うと

$$A^r=A^X\cos\theta+A^Y\sin\theta, \qquad A^\theta=\frac{1}{r}(-A^X\sin\theta+A^Y\cos\theta) \tag{12-31}$$

を得る．ここで (12-28) を眺めてみると

$$\begin{cases} A^r=\dfrac{\partial r}{\partial X}A^X+\dfrac{\partial r}{\partial Y}A^Y \\ A^\theta=\dfrac{\partial\theta}{\partial X}A^X+\dfrac{\partial\theta}{\partial Y}A^Y \end{cases} \tag{12-32}$$

と書けることがわかる．またこの逆変換の式は

$$\begin{cases} A^X=\dfrac{\partial X}{\partial r}A^r+\dfrac{\partial X}{\partial\theta}A^\theta \\ A^Y=\dfrac{\partial Y}{\partial r}A^r+\dfrac{\partial Y}{\partial\theta}A^\theta \end{cases} \tag{12-33}$$

となることも確かめられる．

また (12-25) と (12-31) から

$$A_rA^r+A_\theta A^\theta=A_XA^X+A_YA^Y=(A_X)^2+(A_Y)^2 \tag{12-34}$$

が得られる．この式の右辺は直交回転に対して不変なスカラーである．しかし (12-34) はもっと一般的なことを表わしている．すなわち

$$A_\mu A^\mu = g^{\mu\nu} A_\mu A_\nu = g_{\mu\nu} A^\mu A^\nu \tag{12-35}$$

のような量は，直交座標から曲線座標への変換に対しても不変に保たれるということである．このような不変量はさらに広い意味でスカラーと呼ばれる．

なお，(12-35) の最後の等式を導くときに

$$A_\nu = g_{\nu\mu} A^\mu \tag{12-36}$$

を使った．これを証明するには右辺の A^μ に $A^\mu = g^{\mu\lambda} A_\lambda$ を代入し，さらに $g_{\nu\mu} g^{\mu\lambda} = \delta_\nu{}^\lambda$ を使えばよい．

$$g_{\nu\mu} A^\mu = g_{\nu\mu} g^{\mu\lambda} A_\lambda = \delta_\nu{}^\lambda A_\lambda = A_\nu . \tag{12-37}$$

これまでに得た (12-24)，(12-27)，(12-32)，(12-33) は次のような一般的な型にまとめられる．

$$\begin{cases} A_\mu = \dfrac{\partial X^\nu}{\partial x^\mu} \bar{A}_\nu, \qquad A^\mu = \dfrac{\partial x^\mu}{\partial X^\nu} \bar{A}^\nu, & (12\text{-}38) \\[2ex] \bar{A}_\mu = \dfrac{\partial x^\nu}{\partial X^\mu} A_\nu, \qquad \bar{A}^\mu = \dfrac{\partial X^\mu}{\partial x^\nu} A^\nu . & (12\text{-}39) \end{cases}$$

ここで $\bar{A}^\mu = \bar{A}_\mu$ は，$\boldsymbol{A}$ の直交座標における成分である．(12-38)，(12-39) は直交座標と曲線座標との間の座標変換に際してベクトルの成分がどのように変換されるかを示す完全に一般的な式である．つまり，空間が何次元であってもよいし，また曲線座標がどんなものであっても構わない．

直線座標，特に斜交座標の場合，反変ベクトルとは座標と同じように変換を受ける量であることを学んだが，曲線座標ではこの対応はもっとせまいものになる．斜交座標での例 (11-1) と (11-33) のような関係が成り立つかどうかを見るために試みに

$$A^X = X = r\cos\theta, \qquad A^Y = Y = r\sin\theta$$

とおいて (12-31) の右辺に代入してみよう．(12-31) の第 1 式の右辺は $r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r$ となり，$A^r = r$ とおいてよさそうに思われる．しかし (12-31) の第 2 式の右辺はゼロになってしまい，$A^\theta = \theta$ のように考えることは全く不可能である．

一般に曲線座標においては座標を反変ベクトルと考えることはできない．た

だ座標の“微分”dx^μ は反変ベクトルである．実際（12-32）および（12-33）は

$$\begin{cases} A^X = dX, & A^Y = dY \\ A^r = dr, & A^\theta = d\theta \end{cases} \tag{12-40}$$

とおくことと完全に両立していることがわかるであろう．

§13　座標変換

変　換　則

前節では主として2次元の極座標の例に限って考えてきたが，曲線座標にはもちろんいろいろなものがある．2次元に限っても図 32 のように楕円と双曲

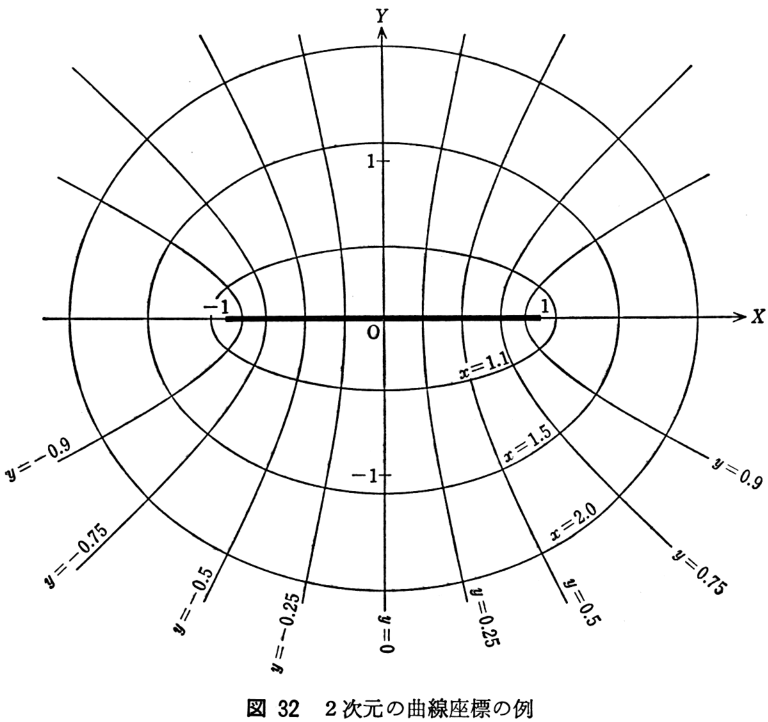


図 32　2次元の曲線座標の例

$X = xy$，$Y = \pm\sqrt{(x^2-1)(1-y^2)}$　($x \geqq 1$，$-1 \leqq y \leqq 1$)．x=一定の点の集合は楕円に，y=一定の点の集合は双曲線となる．

線の組を使って全平面をおおうようなものもある．いま二つの曲線座標 x^μ, x'^μ を考える．それぞれと直交座標との関係は前節の一般的な議論によって調べることができる．次に問題にするのは，x を使って書いておいた式と，x' を使って書いておいた式との間の関係である．つまり $x \to x'$ という**曲線座標同士の間の座標変換**によって種々の量がどのように変換されるかを明らかにしたいのである．

x 系における基底を $\boldsymbol{e}_\mu$, x' 系におけるそれを $\boldsymbol{e}'_\mu$ とする．これらのベクトルの，直交座標系における成分を $e_\mu{}^\nu$, $e'_\mu{}^\nu$ と記すと (12–22) によって

$$e_\mu{}^\lambda = \frac{\partial X^\lambda}{\partial x^\mu}, \qquad e'_\mu{}^\lambda = \frac{\partial X^\lambda}{\partial x'^\mu} \tag{13–1}$$

である．この第２式は，x'^μ を x^ν の関数と考えて

$$e'_\mu{}^\lambda = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}\frac{\partial X^\lambda}{\partial x^\nu} \tag{13–2}$$

と書くことができる．この右辺に (13–1) 第１式を代入すると

$$e'_\mu{}^\lambda = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} e_\nu{}^\lambda \tag{13–3}$$

を得る．これが $x \to x'$ に対する基底の変換則である．

次に x' 系における計量は (12–11), (12–21), (12–22) を x' 系で用いて

$$g'_{\mu\nu} = (\boldsymbol{e}'_\mu \cdot \boldsymbol{e}'_\nu) = \bar{g}_{\rho\sigma} e'_\mu{}^\rho e'_\nu{}^\sigma \tag{13–4}$$

と求められる．この右辺に (13–3) を代入し，(13–4) でプライムを除いた式を使うと

$$g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} g_{\rho\sigma} \tag{13–5}$$

が得られる．計量に対するこの変換則は重要なことを意味する．つまりこれによって定義される**無限小線素が変換に際して不変に保たれる**ということである．実際 x' 系における無限小線素は

$$(ds')^2 = g'_{\mu\nu} dx'^\mu dx'^\nu \tag{13–6}$$

であるが，(13–5) によるとこれは

$$\begin{aligned}\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} g_{\rho\sigma} dx'^\mu dx'^\nu &= g_{\rho\sigma}\left(\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} dx'^\mu\right)\left(\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} dx'^\nu\right) \\ &= g_{\rho\sigma} dx^\rho dx^\sigma = (ds)^2\end{aligned} \tag{13–7}$$

と計算される．逆に $(ds)^2$ を不変に保つという要求を出発点にして (13-5) を導くこともできる．

ベクトル $\boldsymbol{A}$ の共変成分 A_μ, A'_μ は (12-23) と同様に

$$A_\mu=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e}_\mu),\qquad A'_\mu=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e}'_\mu) \tag{13-8}$$

で定義される．$\boldsymbol{A}$ 自身は $x\to x'$ という座標変換とは無関係に決まっているのであるから，A_μ は ${e_\mu}^\lambda$ と同じように変換を受けることになる．すなわち (13-3) から次式を得る．

$$A'_\mu=\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}A_\nu \tag{13-9}$$

これを (12-38) の第1式と比べてみるとよい．(12-38) の第1式は (13-9) の特別の場合として含まれている．このことを理解すれば，今度は (12-38) の第2式から

$$A'^\mu=\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}A^\nu \tag{13-10}$$

が推察されるであろう．これが任意の座標変換 $x\to x'$ に対する反変ベクトルの変換則である．

さらに $g^{\mu\nu}$ の変換則を求めておこう．結果は (13-10) から推察できるように

$$g'^{\mu\nu}=\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho}\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\sigma}g^{\rho\sigma} \tag{13-11}$$

である．これが正しいことは (13-5) と組み合わせて $g'_{\mu\nu}g'^{\nu\lambda}$ を計算してみることによって確かめられる．

$$\begin{aligned} g'_{\mu\nu}g'^{\nu\lambda}&=\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu}\underbrace{\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu}\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\tau}}_{=\frac{\partial x^\sigma}{\partial x^\tau}={\delta^\sigma}_\tau}\frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\theta}g_{\rho\sigma}g^{\tau\theta} \\ &=\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\theta}g_{\rho\sigma}\underbrace{{\delta^\sigma}_\tau g^{\tau\theta}}_{g^{\sigma\theta}}=\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\theta}\underbrace{g_{\rho\sigma}g^{\sigma\theta}}_{\delta_\rho^\theta} \\ &=\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho}=\frac{\partial x'^\lambda}{\partial x'^\mu}={\delta_\mu}^\lambda. \end{aligned} \tag{13-12}$$

すなわち (13-5) と (13-11) によって変換を受ける $g'_{\mu\nu}$ と $g'^{\nu\lambda}$ はやはり互いに逆行列の関係にあるのである．(13-12) の計算の中でたとえば ${\delta^\sigma}_\tau g^{\tau\theta}=g^{\sigma\theta}$

を使ったが，このような関係は容易に理解できるであろう．(縮約の規則によって τ について和をとるのであるが，Kronecker 記号の性質によって τ がちょうど σ に等しい項だけが残る．これと同じ手法は今後も繰返し現われる．)

x'^{μ} を x^{ν} の関数と考えると (12-4) と同じように

$$dx'^{\mu}=\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}}dx^{\nu} \tag{13-13}$$

が成り立つ．これは (13-10) と同じ型をしている．したがって座標の微分 dx^{μ} **は一般的な座標変換に対して反変ベクトルとして変換する．**

これまでいろいろな量の変換則を導くのに，一応直交座標系が存在するものとし，それに関連させながら計算を行なってきた．しかし得られた結果自身は**直交座標系が存在するかどうかに無関係に成り立つ**ものである．これは後で曲面の幾何学を議論する際に特に重要となる事柄である．たとえば計量の変換則 (13-5) が線素を不変にすることを示した (13-7) の計算では直交座標は何も使われなかったことに注意してほしい．

不変量，テンソル

反変ベクトル A^{μ} と共変ベクトル B_{μ} から積

$$C=A^{\mu}B_{\mu} \tag{13-14}$$

をつくってみよう．ここで $B_{\mu}=g_{\mu\nu}B^{\nu}$，$A^{\mu}g_{\mu\nu}=A_{\nu}$ を使うと

$$C=g_{\mu\nu}A^{\mu}B^{\nu}=A_{\nu}B^{\nu} \tag{13-15}$$

と書くこともできる．この量の変換則を考えてみよう．

$$\begin{aligned} C'=A'^{\mu}B'_{\mu} &\overset{(13\text{-}9),\,(13\text{-}10)}{\downarrow}{=} \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}}\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\mu}}A^{\nu}B_{\lambda}=\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\nu}}A^{\nu}B_{\lambda} \\ &=\delta_{\nu}{}^{\lambda}A^{\nu}B_{\lambda}=A^{\nu}B_{\nu}=C \end{aligned} \tag{13-16}$$

すなわち C は任意の変換に対して不変であり，したがってスカラーと呼ぶことができる．

直交座標ならば共変ベクトルと反変ベクトルの区別がなく，したがって (13-14)，または (13-15) は普通のスカラー積 $C=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ になってしまう．(13-14)，または (13-15) はその拡張である．

次に二つの共変ベクトル A_{μ}, B_{ν} からつくられる積

$$C_{\mu\nu}=A_\mu B_\nu \tag{13-17}$$

を考えてみよう．(13-9) により

$$C'_{\mu\nu}=A'_\mu B'_\nu=\frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\nu}A_\lambda B_\tau=\frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\nu}C_{\lambda\tau} \tag{13-18}$$

となる．これと同じように変換する量を2階の共変テンソルという．(13-17) のように二つのベクトルの積ではなくても変換則さえ同じであればよいのである．(13-18) を (13-5) と比べてみると $g_{\mu\nu}$ はまさに2階の共変テンソルであることがわかる．また $g^{\mu\nu}$ と同じように

$$C'^{\mu\nu}=\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda}\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\tau}C^{\lambda\tau} \tag{13-19}$$

のように変換する量があれば2階の反変テンソルと呼ぶ．これは当然二つの反変ベクトルの積と同じ変換を受けるものである．

さらに

$$C_\mu{}^\nu=A_\mu B^\nu \tag{13-20}$$

のような積の変換則は

$$C'_\mu{}^\nu=\frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\tau}C_\lambda{}^\tau \tag{13-21}$$

となる．このように変換する量 $C_\mu{}^\nu$ は2階の混合テンソルと呼ばれる．Kronecker の記号 $\delta_\mu{}^\nu$ はこのようなテンソルの非常に特別な例である．

もっと一般的な量として，任意の階数の混合テンソルを考えることができる．

$$T'_{\mu\nu\cdots}{}^{\rho\sigma\cdots}=\frac{\partial x^\kappa}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\nu}\cdots\frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\tau}\frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\theta}\cdots T_{\kappa\lambda\cdots}{}^{\tau\theta\cdots}. \tag{13-22}$$

このようにテンソルをかけ合わせるとさらに高階のテンソルができる．逆にその添字のうちのいくつかを縮約すると低い階数のテンソルができる．その一番簡単な例は (13-14), (13-15) である（スカラーは0階のテンソル，ベクトルは1階のテンソルといってよい）．また，たとえば

$$E_\mu=C_{\mu\nu}D^\nu \underset{\substack{\uparrow \\ D^\nu=g^{\nu\lambda}D_\lambda}}{=} g^{\nu\lambda}C_{\mu\nu}D_\lambda \tag{13-23}$$

は2階のテンソルとベクトルの積からもう一つのベクトルがつくられることを示している．(13-23) の第1の等式の右辺の各量に (13-18), (13-10) を当て

はめると，積の全体は (13-9) と同じ変換を受けることが示されるのである．

このように添字の縮約によって階数の低いテンソルをつくる手続きはテンソルの積ばかりでなく，一つのテンソルの中に含まれる添字にも適用することができる．後に出てくる例の中から引用すると，4階のテンソル $R^{\mu}{}_{\nu,\rho\sigma}$ から μ と ρ を縮約して2階のテンソル $R_{\nu\sigma}$ をつくることができる [(16-12)].

$$R_{\nu\sigma}=R^{\mu}{}_{\nu,\sigma\mu}. \tag{13-24}$$

これをさらに縮約することもできる [(16-13)].

$$R=R^{\nu}{}_{\nu}=g^{\nu\sigma}R_{\nu\sigma}. \tag{13-25}$$

この R はゼロ階のテンソル，すなわちスカラーである．

以上の実例の中で $g_{\mu\nu}$ または $g^{\mu\nu}$ は，他の量の添字を上げたり下げたりする道具として頻繁に使われたことを見ておいてほしい．

§14 接続係数

Christoffel 記号

§12 で述べたように曲線座標が直交座標や斜交座標のような直線座標と最も違う点は計量 $g_{\mu\nu}$ が場所とともに変化するということである．したがって $\partial g_{\mu\nu}/\partial x^{\lambda}$ のような量は曲線座標を特徴づける重要な量であるに違いない．実は上のような計量の微分の，ある組合せが Christoffel の記号として特別の役割を演ずるのである．

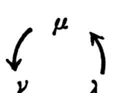
まず $g_{\mu\nu}$ を定義する (12-11)

$$g_{\mu\nu}=\bar{g}_{\rho\sigma}\frac{\partial X^{\rho}}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial X^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} \tag{14-1}$$

を x^{λ} について微分する．

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}}=\bar{g}_{\rho\sigma}\left(\frac{\partial^2 X^{\rho}}{\partial x^{\lambda}\partial x^{\mu}}\frac{\partial X^{\sigma}}{\partial x^{\nu}}+\frac{\partial X^{\rho}}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial^2 X^{\sigma}}{\partial x^{\lambda}\partial x^{\nu}}\right). \tag{14-2}$$

ここで，よく使う手法であるが，μ, ν, λ を循環的に入れ換える．つまり



のように文字を入れ換えるのである．そうすると

$$\frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu}=\bar{g}_{\rho\sigma}\left(\frac{\partial^2 X^\rho}{\partial x^\mu \partial x^\nu}\frac{\partial X^\sigma}{\partial x^\lambda}+\frac{\partial X^\rho}{\partial x^\nu}\frac{\partial^2 X^\sigma}{\partial x^\mu \partial x^\lambda}\right). \tag{14-3}$$

もう一度同様に文字を入れ換えると

$$\frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial x^\nu}=\bar{g}_{\rho\sigma}\left(\frac{\partial^2 X^\rho}{\partial x^\nu \partial x^\lambda}\frac{\partial X^\sigma}{\partial x^\mu}+\frac{\partial X^\rho}{\partial x^\lambda}\frac{\partial^2 X^\sigma}{\partial x^\nu \partial x^\mu}\right). \tag{14-4}$$

(14-3)＋(14-4)－(14-2) をつくって

$$\Gamma_{\lambda\mu\nu}\equiv\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu}+\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu}-\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda}\right) \tag{14-5}$$

という量を計算すると

$$\Gamma_{\lambda\mu\nu}=\bar{g}_{\rho\sigma}\frac{\partial^2 X^\rho}{\partial x^\mu \partial x^\nu}\frac{\partial X^\sigma}{\partial x^\lambda} \tag{14-6}$$

となる．この最初の文字 λ は，他の文字 μ, ν とは少し違った性格をもっている．計量を使って添字 λ を上に上げたもの

$$\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}\equiv g^{\lambda\tau}\Gamma_{\tau\mu\nu} \tag{14-7}$$

は特に“Christoffel の三指記号”と呼ばれ $\begin{Bmatrix}\lambda\\ \mu\nu\end{Bmatrix}$ という特別の記号も用いられる．(14-5)，(14-6) を用いて詳しく書くと

$$\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}=\begin{Bmatrix}\lambda\\ \mu\nu\end{Bmatrix}=\frac{1}{2}g^{\lambda\tau}(\partial_\mu g_{\tau\nu}+\partial_\nu g_{\tau\mu}-\partial_\tau g_{\mu\nu}) \tag{14-8 a}$$

$$=g^{\lambda\tau}\bar{g}_{\rho\sigma}\frac{\partial^2 X^\rho}{\partial x^\mu \partial x^\nu}\frac{\partial X^\sigma}{\partial x^\tau} \tag{14-8 b}$$

である†．もし x^μ も直交座標または一般に直線座標であるならば X^ρ は x^μ の一次関数であるから $\partial^2 X^\rho/\partial x^\mu \partial x^\nu=0$ であり，したがって

$$\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}=0 \tag{14-9}$$

である．しかし x^μ が一般の曲線座標であれば $\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}$ の成分の中には必ずゼロでないものがある．

(14-8) からすぐわかるように $\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}$ は μ **と** ν **の入換えに対して対称**である．

$$\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}=\Gamma^\lambda{}_{\nu\mu} \tag{14-10}$$

---

† たとえば $\partial_\mu g_{\tau\nu}$ というのは $\dfrac{\partial g_{\tau\nu}}{\partial x^\mu}$ の略記法である．同様の例は p. 51 ですでに出てきたが，式のスペースを節約し，全体を見やすくするために今後もよく使われる．

しかし λ と μ, または λ と ν をとり換えても特別の関係は出てこない.

先に調べた2次元の極座標の例で $\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}$ を計算してみよう. (12-10) の形から $g_{\mu\nu}$ の微分の中でゼロでないのはただ一つ†

$$\partial_r g_{\theta\theta}=\partial_1 g_{22}=2r=2x^1 \tag{14-11}$$

だけである. したがって (14-5) から

$$\begin{cases}\Gamma_{122}=-\dfrac{1}{2}\partial_1 g_{22}=-r, \qquad \Gamma_{212}=\Gamma_{221}=r \\ \text{他の}\ \ \Gamma_{\lambda\mu\nu}=0\end{cases} \tag{14-12}$$

を得る. さらに (12-29) を使って (14-7) を計算すると

$$\begin{cases}\Gamma^{1}{}_{22}=-r, \qquad \Gamma^{2}{}_{12}=\Gamma^{2}{}_{21}=\dfrac{1}{r}, \\ \text{他の}\ \ \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}=0\end{cases} \tag{14-13}$$

となる.

共変微分

$\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}$ のもつ意味をさぐるために, まず直交座標系を考え, その中に一つの定数ベクトルを想定してみる. 直交座標系における成分を, 上にバーをつけて表わすことにすると

$$\bar{A}_{\mu}=\text{const.} \tag{14-14}$$

ということである. したがって

$$\frac{\partial \bar{A}_{\mu}}{\partial X^{\nu}}=0. \tag{14-15}$$

このことを曲線座標の言葉で表わすとどうなるであろうか. (12-38) の第1式

$$A_{\mu}=\frac{\partial X^{\sigma}}{\partial x^{\mu}}\bar{A}_{\sigma} \tag{14-16}$$

を x^{ν} について微分してみる.

$$\frac{\partial A_{\mu}}{\partial x^{\nu}}=\frac{\partial^2 X^{\sigma}}{\partial x^{\mu}\partial x^{\nu}}\bar{A}_{\sigma}+\frac{\partial X^{\sigma}}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial \bar{A}_{\sigma}}{\partial x^{\nu}} \tag{14-17}$$

この第2項はゼロである. なぜならば $\bar{A}_{\mu}$ は全空間で同じ値をとるのである

† 前の脚注で説明したのと同じように $\dfrac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial r}$ のことを $\partial_r g_{\theta\theta}$ と略記する.

から，(14-15) のみならず

$$\frac{\partial \bar{A}_\mu}{\partial x^\nu}=0 \tag{14-18}$$

も成り立つからである．

(14-17) の第1項に現われた $\partial^2 X^\sigma/\partial x^\mu \partial x^\nu$ は $\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}$ で表わすことができるはずである．(14-6) に $\partial x^\lambda/\partial X^\tau$ をかけると

$$\Gamma_{\lambda\mu\nu}\frac{\partial x^\lambda}{\partial X^\tau}=\bar{g}_{\rho\sigma}\frac{\partial x^\lambda}{\partial X^\tau}\frac{\partial X^\sigma}{\partial x^\lambda}\frac{\partial^2 X^\rho}{\partial x^\mu \partial x^\nu}=\bar{g}_{\rho\sigma}\underbrace{\frac{\partial X^\sigma}{\partial X^\tau}}_{=\delta^\sigma{}_\tau}\frac{\partial^2 X^\rho}{\partial x^\mu \partial x^\nu}$$

$$=\bar{g}_{\rho\tau}\frac{\partial^2 X^\rho}{\partial x^\mu \partial x^\nu}. \tag{14-19}$$

さらに $\bar{g}^{\sigma\tau}$ をかけ，$\bar{g}_{\rho\tau}\bar{g}^{\tau\sigma}=\delta_\rho{}^\sigma$ を使うと (14-19) は

$$\frac{\partial^2 X^\sigma}{\partial x^\mu \partial x^\nu}=\bar{g}^{\sigma\tau}\frac{\partial x^\lambda}{\partial X^\tau}\Gamma_{\lambda\mu\nu} \tag{14-20}$$

という型になる．これを (14-18) とともに (14-17) に代入すると

$$\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}=\Gamma_{\lambda\mu\nu}\frac{\partial x^\lambda}{\partial X^\tau}\bar{g}^{\tau\sigma}\bar{A}_\sigma=\Gamma_{\lambda\mu\nu}\underbrace{\frac{\partial x^\lambda}{\partial X^\tau}\bar{A}^\tau}_{=A^\lambda\ [(12\text{-}38)\ \text{の第2式}]}=\Gamma_{\lambda\mu\nu}A^\lambda$$

$$\overset{(14\text{-}7)}{=}\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}A_\lambda \tag{14-21}$$

を得る．

この式によれば，**直交座標系で定数であるようなベクトルでもその曲線座標における成分は定数ではなく**，(14-21) のように Christoffel 記号で表わされることになる．しかし，直交座標で (14-15) が成り立つことの痕跡はやはりあるはずである．それを表現するには普通の微分の代りに“共変微分”というものを考えるのが便利である．共変ベクトルの共変微分は次の式によって定義される．

$$\nabla_\nu A_\mu \equiv \partial_\nu A_\mu - \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}A_\lambda. \tag{14-22}$$

これを使えば (14-21) は

$$\nabla_\nu A_\mu=0 \tag{14-23}$$

と書くことができる．これが (14-15) の痕跡なのである．共変微分が普通の

微分と異なる分量を表わす $\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}$ のことを一般に“接続係数”と呼ぶ.

平行移動

ベクトルの共変微分という概念は，ベクトルが直交座標で定数成分をもつという特別な場合でなくても意味をもつものである．このことを次に議論しよう．

普通の微分は

$$\partial_\nu A_\mu(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{A_\mu(x+\Delta x)-A_\mu(x)}{\Delta x^\nu} \tag{14-24}$$

で定義される．これに対して (14–22) の共変微分は

$$\nabla_\nu A_\mu(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{A_\mu(x+\Delta x)-A_\mu(x+\Delta x//x)}{\Delta x^\nu} \tag{14-25}$$

で与えられるとしてみよう．ここで $A_\mu(x+\Delta x//x)$ と書いたものは差し当り何かわからないものである．逆に (14–22) の定義に合うように $A_\mu(x+\Delta x//x)$ を決め，その意味をさぐろうとしているのである．

(14–22) に (14–24), (14–25) を代入すると

$$A_\mu(x+\Delta x//x)=A_\mu(x)+\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}(x)A_\lambda(x)\Delta x^\nu \tag{14-26}$$

となる．この関係式を，再び 2 次元極座標の場合について調べてみよう．特に

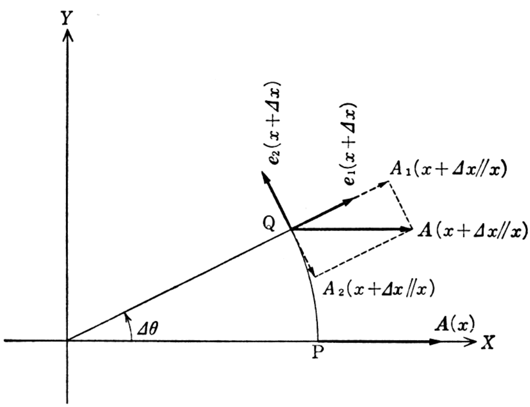


図 33

点 P で X 軸方向を向いたベクトル $\boldsymbol{A}$ を円周上に沿って点 Q に平行移動する．

簡単な場合を考える．点 P は $x^1=r,\ x^2=\theta=0$，点 Q は $x^1=r,\ x^2=\Delta\theta$ に対応するとする．すなわち P と Q とは同じ円周上にあり，したがって $\Delta r=0$ である (図 33)．このとき (14-13) を使うと

$$\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}A_{\lambda}\Delta x^{\nu}=\begin{cases}\dfrac{1}{r}A_2(x)\Delta\theta & (\mu=1)\\ -rA_1(x)\Delta\theta & (\mu=2)\end{cases} \tag{14-27}$$

となる．さらに説明を簡単にするために $A_2(x)=0$ としてみる．つまり点 P では $\boldsymbol{A}$ は X 軸の方向を向いているとする．このとき (14-27) を (14-26) に代入すると

$$\begin{cases}A_1(x+\Delta x//x)=A_1(x)\\ A_2(x+\Delta x//x)=-rA_1(x)\Delta\theta\end{cases} \tag{14-28}$$

を得る．

この左辺を，点 Q における共変成分とみなして，その直交座標での成分を求めてみよう．そのためには (12-26) の右辺の $A_r,\ A_\theta$ として (14-28) の左辺を代入し，また $\cos\theta=1,\ \sin\theta=\Delta\theta$ とおけばよい．$(\Delta\theta)^2$ の項を落とすと

$$\begin{cases}A_X(x+\Delta x//x)=A_1(x+\Delta x//x)\overset{(14\text{-}28)}{=}A_1(x)\\ A_Y(x+\Delta x//x)=A_1(x+\Delta x//x)\Delta\theta+\dfrac{1}{r}A_2(x+\Delta x//x)\overset{(14\text{-}28)}{=}0\end{cases} \tag{14-29}$$

となる．つまり $A_\mu(x+\Delta x//x)$ というベクトルは X 軸の方向を向いていて，大きさは $A_1(x)$ と同じである．すなわち点 P における $A_\mu(x)$ というベクトルをそのまま点 Q に“平行移動”したものに他ならない．それはもともと点 Q に与えられていたかもしれないベクトル $A_\mu(x+\Delta x)$ とは本来別のものであるので上のような記号を用いたのである†．

直交座標系では，あるベクトルの平行移動というのは大変簡単なことで改めて議論するまでもない．各成分を同じ値に保ったまま移動するということに他ならない．その意味で

$$\bar{A}_\mu(x+\Delta x//x)=\bar{A}_\mu(x) \tag{14-30}$$

† 空間内の各点ごとにそれぞれ異なったベクトルが与えられているとき，その全体を“ベクトル場”という．たとえば点電荷のまわりにつくられる電場 $\boldsymbol{E}(x,y,z)$ とか，電流がつくる磁束密度 $\boldsymbol{B}(x,y,z)$ といったものを思い浮かべてみるとよい．

である．しかし極座標では明らかにこうはならない．ベクトルは平行移動されただけなのに，**基底の方が変化し**，その分だけ成分が変化するのである．(14-26) はそれを表わしている．となり合った2点におけるベクトルの平行関係を与え，それによって2点の幾何学を"接続"するのが接続係数 $\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}$ である．

もちろん，直線座標では計量が定数であり，したがって接続係数はゼロである．それゆえ (14-30) は (14-26) の特別な場合にすぎない．

基底の変換

平行移動の概念をもう一つ別の面から見ておこう．(12-22) によれば点 x における基底をなすベクトル $\boldsymbol{e}_\mu(x)$ の成分は

$$e_\mu{}^\rho(x)=\frac{\partial X^\rho(x)}{\partial x^\mu} \tag{14-31}$$

で与えられる．同様に点 $x+\Delta x$ では

$$e_\mu{}^\rho(x+\Delta x)=\left.\frac{\partial X^\rho(x)}{\partial x^\mu}\right|_{x+\Delta x} \tag{14-32}$$

である．(14-32) を点 x のまわりで展開して Δx の1次の項までとる．

$$e_\mu{}^\rho(x+\Delta x)=e_\mu{}^\rho(x)+\frac{\partial e_\mu{}^\rho(x)}{\partial x^\nu}\Delta x^\nu. \tag{14-33}$$

この第2項に (14-31) を代入すると

$$\frac{\partial e_\mu{}^\rho(x)}{\partial x^\nu}\Delta x^\nu=\frac{\partial^2 X^\rho}{\partial x^\mu\partial x^\nu}\Delta x^\nu \overset{(14\text{-}20)}{=} \bar{g}^{\rho\sigma}\frac{\partial x^\lambda}{\partial X^\sigma}\Gamma_{\lambda\mu\nu}\Delta x^\nu \tag{14-34}$$

となる．これに

$$\Gamma_{\lambda\mu\nu} \overset{(14\text{-}7)\text{ の逆}}{=} g_{\lambda\kappa}\Gamma^\kappa{}_{\mu\nu} \overset{(12\text{-}11)}{=} \bar{g}_{\tau\theta}\frac{\partial X^\tau}{\partial x^\lambda}\frac{\partial X^\theta}{\partial x^\kappa}\Gamma^\kappa{}_{\mu\nu} \tag{14-35}$$

を代入すると (14-34) は

$$\bar{g}^{\rho\sigma}\underbrace{\frac{\partial x^\lambda}{\partial X^\sigma}\bar{g}_{\tau\theta}\frac{\partial X^\tau}{\partial x^\lambda}}_{\frac{\partial x^\lambda}{\partial X^\sigma}\frac{\partial X^\tau}{\partial x^\lambda}=\delta_\sigma{}^\tau}\frac{\partial X^\theta}{\partial x^\kappa}\Gamma^\kappa{}_{\mu\nu}\Delta x^\nu=\frac{\partial X^\rho}{\partial x^\kappa}\Gamma^\kappa{}_{\mu\nu}\Delta x^\nu=e_\kappa{}^\rho(x)\Gamma^\kappa{}_{\mu\nu}\Delta x^\nu \tag{14-36}$$

となり，したがって (14-33) は

$$\boldsymbol{e}_\mu(x+\Delta x)=\boldsymbol{e}_\mu(x)+\boldsymbol{e}_\kappa(x)\Gamma^\kappa{}_{\mu\nu}(x)\Delta x^\nu \tag{14-37}$$

という型になる．

この両辺に，点 x におけるベクトル $\boldsymbol{A}(x)$ をスカラー積としてかける．右辺は

$$A_\mu(x)+\Gamma^\kappa{}_{\mu\nu}(x)A_\kappa(x)\Delta x^\nu \tag{14-38}$$

となるが，これはちょうど (14-26) の右辺と同じものである．したがって

$$A_\mu(x+\Delta x//x)=(\boldsymbol{A}(x)\cdot\boldsymbol{e}_\mu(x+\Delta x)) \tag{14-39}$$

ということがわかった．つまり (14-26) で定義された $A_\mu(x+\Delta x//x)$ という量は，**点 x におけるベクトル $\boldsymbol{A}(x)$ を，点 $x+\Delta x$ における基底に射影した**共変成分に他ならず，これは先に述べた平行移動の考え方と完全に一致するものである．

§15 接続の意味

ベクトルの長さ

前節および前々節で種々の量の変換性を導くに当たって，いつも背後に直交座標系が存在するものと考えてきた．しかし得られた結果自身はそのような直交座標の存在とは無関係であり，曲線座標系相互の間の関係式であると考えてよい．たとえばある量の変換則が (13-9) であるならば，それだけでその量が共変ベクトルであると呼ぶのに十分である．もとになる直交座標系が存在しないと，ベクトルを直観的に思い浮かべることが難しくはなるが，あまりに直交座標での描像に捉われても困ることがある．このことは次節で述べる曲面の議論でさらに明らかになる．

Riemann の幾何学の出発点は計量テンソル $g_{\mu\nu}$ である．これによって無限小線素が与えられる．次に (14-5) または (14-8 a) によって接続係数を与えれば，(14-26) によって近くの点の量との関係がつけられ，最終的に全空間の幾何学をつくることができる．その際，直交座標で表わされた関係式 (12-11) や (14-6) などに頼る必要はない．しかしながらこの行き方では接続係数に対し，直交座標の助けを借りることなしに，はっきりした意味づけをしておかなくてはならない．

まずベクトル $\boldsymbol{A}(x)$ の長さというものを考えてみよう．点 x におけるベク

トルの長さの自乗は

$$C(x)=g_{\mu\nu}(x)A^{\mu}(x)A^{\nu}(x)=A^{\mu}(x)A_{\mu}(x) \tag{15-1}$$

によって与えられるとする．これは無限小線素の式 $(ds)^2=g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu}$ からも自然に期待されるものである．便宜上 (15-1) を

$$C(x)=g^{\mu\nu}(x)A_{\mu}(x)A_{\nu}(x) \tag{15-2}$$

と書いておく．$A_{\mu}(x)$ を点 $x+dx$ に平行移動したものの長さの自乗を

$$C(x+dx//x)=g^{\mu\nu}(x+dx)A_{\mu}(x+dx//x)A_{\nu}(x+dx//x) \tag{15-3}$$

とする．$g^{\mu\nu}$ として $x+dx$ におけるものを使っていることに注意．$g^{\mu\nu}$ を点 x のまわりで展開して一次の微小量のみ残すと

$$g^{\mu\nu}(x+dx)=g^{\mu\nu}(x)+\partial_{\lambda}g^{\mu\nu}(x)\cdot dx^{\lambda} \tag{15-4}$$

と書くことができる．また平行移動された共変ベクトルについては (14-26) を使う．

$$A_{\mu}(x+dx//x)=A_{\mu}(x)+\Gamma^{\rho}{}_{\mu\kappa}(x)A_{\rho}(x)dx^{\kappa}. \tag{15-5}$$

(15-4), (15-5) を (15-3) の右辺に代入して dx の一次の微小量のみ残す．その際 (15-4) に出てくる $g^{\mu\nu}$ の微分を，下つき添字の $g_{\mu\nu}$ の微分で書き直しておく．

$$\partial_{\lambda}g^{\mu\nu}=-g^{\mu\sigma}g^{\nu\tau}\partial_{\lambda}g_{\sigma\tau}. \tag{15-6}$$

この式を導くには

$$\partial_{\lambda}(g^{\mu\tau}g_{\tau\theta})=\partial_{\lambda}(\delta^{\mu}{}_{\theta})=0 \tag{15-7}$$

から出発する．左辺を書き直して

$$(\partial_{\lambda}g^{\mu\tau})g_{\tau\theta}=-g^{\mu\tau}\partial_{\lambda}(g_{\tau\theta}) \tag{15-8}$$

を得る．これに $g^{\theta\nu}$ をかけると (15-6) が出てくる．こうして (15-3) は

$$C(x+dx//x)=g^{\mu\nu}(x)A_{\mu}(x)A_{\nu}(x) + (\partial_{\lambda}g^{\mu\nu}+g^{\mu\sigma}\Gamma^{\nu}{}_{\sigma\lambda}+g^{\nu\sigma}\Gamma^{\mu}{}_{\sigma\lambda})A_{\mu}A_{\nu}dx^{\lambda} \tag{15-9}$$

となる．ここで (14-8 a)

$$\Gamma^{\nu}{}_{\sigma\lambda}=\frac{1}{2}g^{\nu\rho}(\partial_{\sigma}g_{\rho\lambda}+\partial_{\lambda}g_{\rho\sigma}-\partial_{\rho}g_{\sigma\lambda}) \tag{15-10}$$

を用い，(15-6) にも注意すると (15-9) の右辺第 2 項のかっこの中はちょうどゼロになることがわかる．したがって**ベクトルの長さは平行移動によって変わらない**ことが示されたのである．

上の計算を少し一般化すれば二つのベクトルのスカラー積 $A_\mu B^\mu$ も，平行移動によって値を変えないことが結論される．このことからさらに，二つのベクトルのなす角も平行移動によって不変に保たれることになる．

逆に，ベクトルの長さ，またはスカラー積が平行移動によって不変であることを要請すると接続係数は (15-10) に決まってしまうであろうか．この問題はここでは詳しく論じない．しかし結果だけ述べると，$\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}$ の μ, ν **の入換えに対して反対称な部分を除いて**，接続係数は一意的に Christoffel 記号になってしまうのである．$\left\{ {\lambda \atop \mu\nu} \right\}$ は μ, ν について対称であったことを思い出してほしい．反対称部分をゼロにおくという制限を課し，Christoffel 記号を接続係数として用いることを Riemann 接続と呼び，これに基づく幾何学が Riemann 幾何学である．

Riemann 接続に関して重要な事項をいくつか挙げておこう．

計量条件

ベクトルの長さの自乗を平行移動したものを (15-3) で表わしたが，これは当然

$$g_{\mu\nu}(x+dx)A^\mu(x+dx//x)A^\nu(x+dx//x) \tag{15-11}$$

とも表わされるべきである．これは共変，および反変ベクトルを結ぶ関係 $A^\mu=g^{\mu\nu}A_\nu$, $A_\mu=g_{\mu\nu}A^\nu$ が平行移動した後でも成り立つべきであると要請するのと同じことである．

$$\begin{cases} A^\mu(x+dx//x)=g^{\mu\nu}(x+dx)A_\nu(x+dx//x) & (15\text{-}12) \\ A_\mu(x+dx//x)=g_{\mu\nu}(x+dx)A^\nu(x+dx//x). & (15\text{-}13) \end{cases}$$

(15-12) の右辺に (15-4), (15-5) を代入すると (15-12) は

$$A^\mu(x+dx//x)=A^\mu(x)+[(\partial_\lambda g^{\mu\nu})A_\nu+g^{\mu\kappa}\Gamma^\rho{}_{\kappa\lambda}A_\rho]dx^\lambda \tag{15-14}$$

となる．右辺のかっこの中で (15-6), (15-10) を使ってまとめ直すと結局

$$A^\mu(x+dx//x)=A^\mu(x)-\Gamma^\mu{}_{\lambda\nu}(x)A^\nu(x)dx^\lambda \tag{15-15}$$

を得る．(15-5) との類似と差異に注目してほしい．

共変ベクトルの共変微分 (14-22)

$$\nabla_\nu A_\mu=\partial_\nu A_\mu-\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}A_\lambda \tag{15-16}$$

に対応して反変ベクトルの共変微分は，(15-15) に従って

$$\nabla_\nu A^\mu = \partial_\nu A^\mu + \Gamma^\mu{}_{\nu\lambda} A^\lambda \tag{15-17}$$

で与えられることになる．

さて (15-16), (15-17) を比べると重要な結果が得られる．(15-16) に $g^{\rho\mu}$ をかけてみると

$$\begin{aligned} g^{\rho\mu}\nabla_\nu A_\mu &= g^{\rho\mu}\partial_\nu A_\mu - g^{\rho\mu}\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}A_\lambda \\ &= \partial_\nu(g^{\rho\mu}A_\mu) - (\partial_\nu g^{\rho\mu})A_\mu - g^{\rho\mu}\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}A_\lambda. \end{aligned} \tag{15-18}$$

最後の行の第 1 項は $\partial_\nu A^\rho$ であり，あとの 2 項を集めて整理するとちょうど $\Gamma^\rho{}_{\nu\lambda}A^\lambda$ となっていることがわかる．そこで (15-17) を使うと (15-18) の右辺は結局 $\nabla_\nu A^\rho$ に他ならない．すなわち

$$g^{\rho\mu}\nabla_\nu A_\mu = \nabla_\nu(g^{\rho\mu}A_\mu) \tag{15-19}$$

を得たことになる．∇_ν は微分演算子を含むから積に対しては Leibnitz の法則が成り立つはずである．つまり (15-19) の右辺は

$$\nabla_\nu(g^{\rho\mu}A_\mu) = (\nabla_\nu g^{\rho\mu})A_\mu + g^{\rho\mu}(\nabla_\nu A_\mu) \tag{15-20}$$

と書かれるべきである．したがって (15-19) は

$$\nabla_\nu g^{\rho\mu} = 0 \tag{15-21}$$

を意味する．これから直ちに

$$\nabla_\nu g_{\rho\mu} = 0 \tag{15-22}$$

も得られる．これは計量に関する“計量条件”と呼ばれている．

高階のテンソルの共変微分は (15-16), (15-17) の組合せによって得られる．たとえば

$$\begin{cases} \nabla_\nu T^{\mu\lambda} = \partial_\nu T^{\mu\lambda} + \Gamma^\mu{}_{\nu\kappa}T^{\kappa\lambda} + \Gamma^\lambda{}_{\nu\kappa}T^{\mu\kappa} \\ \nabla_\nu T^\mu{}_\lambda = \partial_\nu T^\mu{}_\lambda + \Gamma^\mu{}_{\nu\kappa}T^\kappa{}_\lambda - \Gamma^\kappa{}_{\nu\lambda}T^\mu{}_\kappa. \end{cases} \tag{15-23}$$

$T^{\mu\lambda}$ として $g^{\mu\lambda}$ を代入すれば (15-21) が再現される．もちろんスカラー $f(x)$ に対しては

$$\nabla_\nu f = \partial_\nu f \tag{15-24}$$

である．

接続係数の変換性

もう一つ重要なこととして $\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}$ は**テンソルではない**ことを強調しておかねばならない．

(14-5) を x' の座標系で書いておく.

$$\Gamma'_{\lambda\mu\nu}(x')=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g'_{\lambda\nu}}{\partial x'^{\mu}}+\frac{\partial g'_{\lambda\mu}}{\partial x'^{\nu}}-\frac{\partial g'_{\mu\nu}}{\partial x'^{\lambda}}\right). \tag{15-25}$$

かっこの中の第1項は次のように変型される.

$$\begin{aligned}\frac{\partial g'_{\lambda\nu}}{\partial x'^{\mu}} &\overset{(13\text{-}5)}{=} \frac{\partial}{\partial x'^{\mu}}\left(\frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\lambda}}\frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}}g_{\rho\sigma}\right)\\ &=\frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\lambda}}\frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}}\underbrace{\frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x'^{\mu}}}_{=\frac{\partial x^{\tau}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x^{\tau}}}+g_{\rho\sigma}\frac{\partial}{\partial x'^{\mu}}\left(\frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\lambda}}\frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}}\right)\end{aligned} \tag{15-26}$$

(15-25) のかっこの中の第2，第3項についても同様に変型する. (15-26) の最後の行の第1項に相当する項を集めると

$$\frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\lambda}}\frac{\partial x^{\tau}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}}\Gamma_{\rho\tau\sigma} \tag{15-27}$$

となることはすぐにわかるであろう. 次に (15-26) の最後の行の第2項に相当する項を集めて整理すると, x を x' で2度微分した項を含むことになる. 結局 (15-25) は

$$\Gamma'_{\lambda\mu\nu}(x')=\frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\lambda}}\frac{\partial x^{\tau}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}}\Gamma_{\rho\tau\sigma}+g_{\rho\sigma}\frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\lambda}}\frac{\partial^2 x^{\sigma}}{\partial x'^{\mu}\partial x'^{\nu}} \tag{15-28}$$

となる.

この第1項だけならば $\Gamma_{\lambda\mu\nu}$ は3階の共変テンソルとして変換することになる (たとえば (13-18) と比べてみよ). しかし (15-28) の第 2 項があるとそうはいえない. もし $x\to x'$ の**変換が線型であれば** $\partial^2 x^{\sigma}/\partial x'^{\mu}\partial x'^{\nu}=0$ であり, そのような変換に対しては $\Gamma_{\lambda\mu\nu}$ はテンソルということになるが, 一般の変換に対しては $\Gamma_{\lambda\mu\nu}$, したがって $\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}$ はテンソルのようには振る舞わない.

$\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}$ と書くといかにも3階の混合テンソルであるかのような感じを与える. そういう誤解を避けるには Christoffel の記号 $\left\{\begin{matrix}\lambda\\ \mu\nu\end{matrix}\right\}$ の方が適している.

ベクトルの単なる微分, $\partial_{\nu}A^{\mu}$ とか $\partial_{\nu}A_{\mu}$ は同じような意味で2階のテンソルではない. 実際

$$\frac{\partial A'^{\mu}}{\partial x'^{\nu}}=\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\nu}}\frac{\partial}{\partial x^{\lambda}}\left(\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\kappa}}A^{\kappa}\right)$$

$$=\frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\nu}\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\kappa}\frac{\partial A^\kappa}{\partial x^\lambda}+\frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\nu}A^\kappa\frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\lambda \partial x^\kappa} \tag{15-29}$$

となり，最後の行の第 2 項がゼロの場合に限り $\partial_\nu A^\mu$ は2階の混合テンソルとして変換する．単に添字が二つあるというだけではテンソルの資格とはならないのである．

これに対して共変微分 $\nabla_\nu A^\mu=\partial_\nu A^\mu+\Gamma^\mu{}_{\nu\lambda}A^\lambda$ を変換させると，第 2 項の $\Gamma^\mu{}_{\nu\lambda}$ の非テンソル部分からの寄与が出てきて，それがちょうど (15-29) の最後の行の第2項を打ち消してくれるのである．これを確かめるのは読者の練習問題としておこう．とにかく

$$\nabla'_\nu A'^\mu=\frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\nu}\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\kappa}\nabla_\lambda A^\kappa \tag{15-30}$$

となる．すなわち $\nabla_\nu A^\mu$ はテンソルである．$\nabla_\nu A_\mu$ や，他の高階のテンソルの微分についても全く同様である．このように単なる微分に代わってテンソルをつくることができ，ひいては種々の方程式を“共変的な”型に整えるというのが共変微分の効能の一つである．

局所直線座標系

$\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}$ がテンソルでないことの結果として，適当な座標変換によって $\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}$ の全成分をある点でゼロにすることができる．もし $\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}$ がテンソルであったならばそういうことはできないはずである．なぜならば全成分がゼロであるような座標系から (15-27) のような変換を行なって新しい座標系 (x') でゼロでない成分をつくり出すことはできないからである．しかしテンソルでなければ話は別である．そのような座標変換が確かに存在することを示しておこう．

まず (15-28) から次の変換式を求めておく．

$$\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}=\frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\tau}\frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu}\frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu}\Gamma'^\tau{}_{\rho\sigma}+\frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\kappa}\frac{\partial^2 x'^\kappa}{\partial x^\mu \partial x^\nu}. \tag{15-31}$$

ある点 P で $\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}$ は $\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}(P)$ という値をもっていたとしよう．もし

$$\left.\frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\kappa}\frac{\partial^2 x'^\kappa}{\partial x^\mu \partial x^\nu}\right|_P=\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}(P) \tag{15-32}$$

となるように x' を選べば (15-31) から

$$\Gamma'^\tau{}_{\rho\sigma}(P)=0 \tag{15-33}$$

となる.

点 P の座標を x_P, および x'_P と書くことにすると, (15-32) を満足させるためには

$$(x'-x'_P)^\lambda=(x-x_P)^\lambda+\frac{1}{2}\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}(P)(x-x_P)^\mu(x-x_P)^\nu \qquad (15\text{-}34)$$

と選べばよい. なぜならば

$$\frac{\partial x'^\kappa}{\partial x^\mu}=\delta_\mu{}^\kappa+\frac{1}{2}\Gamma^\kappa{}_{\rho\sigma}(P)[\delta_\mu{}^\rho(x-x_P)^\sigma+(x-x_P)^\rho\delta_\mu{}^\sigma] \qquad (15\text{-}35)$$

$$\left.\frac{\partial^2 x'^\kappa}{\partial x^\mu\partial x^\nu}\right|_P=\frac{1}{2}\Gamma^\kappa{}_{\rho\sigma}(P)(\delta_\mu{}^\rho\delta_\nu{}^\sigma+\delta_\nu{}^\rho\delta_\mu{}^\sigma)=\Gamma^\kappa{}_{\mu\nu}(P) \qquad (15\text{-}36)$$

$$\left.\frac{\partial x'^\kappa}{\partial x^\lambda}\right|_P=\delta^\kappa{}_\lambda, \qquad \left.\frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\kappa}\right|_P=\delta^\lambda{}_\kappa. \qquad (15\text{-}37)$$

(15-36), (15-37) を (15-32) の左辺に代入すれば, 確かに $\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}(P)$ となる.

接続係数がゼロであるということは, 座標系 x' が直線座標系であることを意味する. ただしそのような座標系をつくることができるのは点 P の近傍に限られる. 厳密にいえば**接続係数自身はゼロにすることができるが, その微分をゼロにすることは不可能**なのである. このことは後に曲率テンソルに関連して議論される. このような性質をもった座標系を“局所直線座標系”と呼ぶ.

このような座標系の存在は一般相対論への応用で特に重要である. あとで述べるように一般相対論では局所直線座標系は局所 Lorentz 系であることが要請され, これが等価原理の数学的表現となるのである.

§16 曲面の幾何学

曲　面

この節では, これまでに学んだ道具立てを用いて曲面の特質のうち最も重要なものをいくつか議論する. 初めに方針を述べておこう.

しばらく相対論も重力も忘れて, 我々の空間は純粋に3次元の Euclid 空間であるとする. 目の前に地球儀がある. 我々はその表面, つまり球面の幾何学的性質を, 3次元の Euclid 幾何学をもとにして議論することができる. ところで地球儀の表面に蟻が1匹いるとしよう. この蟻は地球儀の上をはいまわる

ことができ，表面に引かれた緯度線，子午線を認識することができるが，表面に垂直な高さについては何も識別できないとする．この蟻にとっては2次元的な球面こそ全空間なのである．この蟻にも，球面の幾何学をつくり上げることは可能である．2点間の最短コースはどうとればよいか，とか，円周率は半径とともに変わり，常に π より小さいといった事柄をすべて緯度，経度のみによって表現することができる．

この蟻のように，我々も曲面の幾何学を曲面の座標のみを用いて構成したいのである．とはいえ，初めはやはり3次元 Euclid 空間の助けを借りた方が考えやすい．しかしこれはあくまで足場として用いるのであり，建設完成後にはとり払われる．

なぜこのようなことを試みるかという理由も述べておこう．一般相対論では我々の4次元時空がすでに曲がった空間であると考える．このような空間は，まず5次元の平らな空間を想定し†，その中の4次元的な超曲面として考えてもよい．しかし上に述べた蟻と同様我々も，そのように仮想的な空間座標の助けを借りることなく，現実の4次元座標のみですべてを表現したいのである．このような考え方を背景にして，以下では主として3次元の中の球面の例を中心にして調べていこう．

さて3次元の極座標としては

$$\begin{cases} X=X^1=r\sin\theta\cos\varphi \\ Y=X^2=r\sin\theta\sin\varphi \\ Z=X^3=r\cos\theta \end{cases} \tag{16-1}$$

が用いられる（図 34）．また

$$\theta=x^1, \qquad \varphi=x^2, \qquad r=x^3 \tag{16-2}$$

と書くことにする．

球面は r=一定で与えられ，球面上の位置は θ と φ で決定される．つまり θ, φ が球面上の曲線座標である（地球表面でいえば φ が経度，$|\pi/2-\theta|$ が緯度である）．

(12-22) に従って基底ベクトルをつくると

† 68 ページの脚注参照．

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}_1=(r\cos\theta\cos\varphi,\ r\cos\theta\sin\varphi,\ -r\sin\theta) \\ \boldsymbol{e}_2=(-r\sin\theta\sin\varphi,\ r\sin\theta\cos\varphi,\ 0) \\ \boldsymbol{e}_3=(\sin\theta\cos\varphi,\ \sin\theta\sin\varphi,\ \cos\theta) \end{cases} \tag{16-3}$$

となる．$\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ は接線ベクトル，$\boldsymbol{e}_3$ は法線ベクトルである．$\boldsymbol{e}_1$ と $\boldsymbol{e}_2$ は“接平面”を決定する．計量は，たとえば (12-21) から計算することができ

$$\begin{cases} g_{11}=r^2, \quad g_{22}=r^2\sin^2\theta, \quad g_{33}=1 \\ \text{他の}\ \ g_{\mu\nu}=0 \end{cases} \tag{16-4}$$

となる．逆行列もすぐに求められる．

$$\begin{cases} g^{11}=\dfrac{1}{r^2}, \quad g^{22}=\dfrac{1}{r^2\sin^2\theta}, \quad g^{33}=1 \\ \text{他の}\ \ g^{\mu\nu}=0. \end{cases} \tag{16-5}$$

無限小線素は $(ds)^2=g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ であるが，**球面上の2点の間の線素**に限るな

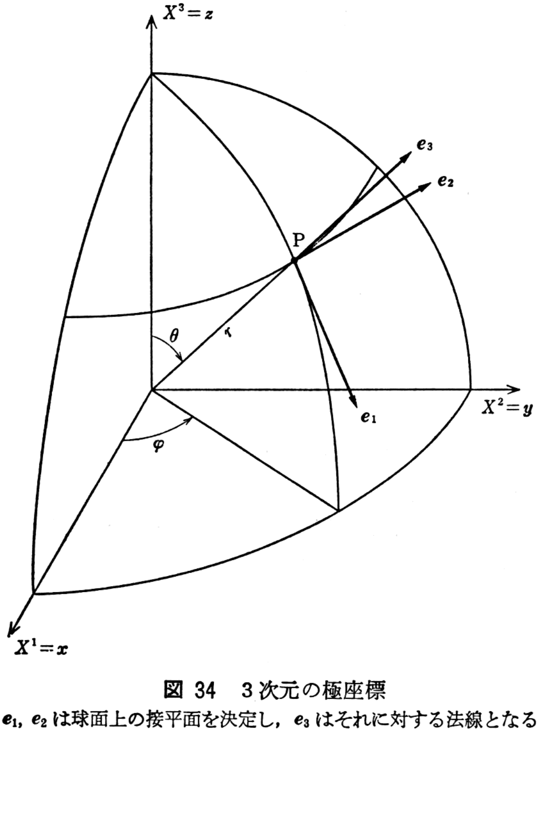


図 34　3次元の極座標

e_1, e_2 は球面上の接平面を決定し，e_3 はそれに対する法線となる．

らば $dx^3=0$ とおいてよく，したがって

$$(ds)^2=r^2(d\theta)^2+r^2\sin^2\theta(d\varphi)^2 \tag{16-6}$$

である．

後の便利のために接続係数も計算しておく．(16-4)，(16-5) を (14-8 a) に代入すると

$$\begin{cases} \Gamma^2{}_{12}=\Gamma^2{}_{21}=\cot\theta, \quad \Gamma^1{}_{22}=-\sin\theta\cos\theta, \\ \Gamma^3{}_{11}=-r, \quad \Gamma^3{}_{22}=-r\sin^2\theta, \quad \Gamma^1{}_{31}=\Gamma^1{}_{13}=\Gamma^2{}_{23}=\Gamma^2{}_{32}=\dfrac{1}{r}, \\ \text{他の}\ \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}=0 \end{cases} \tag{16-7}$$

を得る．球面の幾何学に必要なのは第 1 行だけである．以後しばらくは μ, ν は 1, 2 のみをとることとする．

曲　率

曲面が平らでないことを数学的に表現するものに Gauss の“全曲率”という量がある．それは次のようにして定義される．

曲面上の点 P のまわりに微小面積 dS をとる．この中で法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ を考える．その大きさは 1 であるとする（図 35）．微小面積の中で点を動かしてみると，もし曲面が曲がっていれば $\boldsymbol{n}$ はいろいろな向きを向くであろう．$\boldsymbol{n}$ の始点を一点に据えると，$\boldsymbol{n}$ の先端は単位球面のある部分を動くことになる．

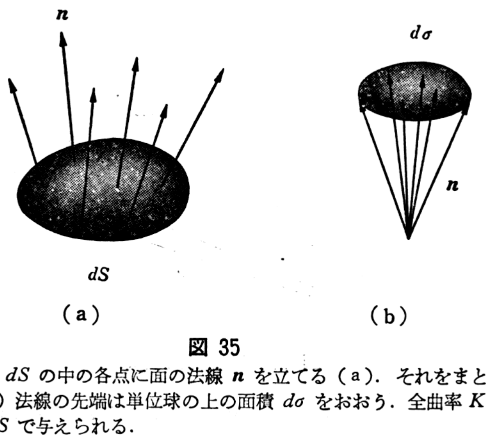


図 35

微小面積 dS の中の各点に面の法線 $\boldsymbol{n}$ を立てる（a）．それをまとめると（b）法線の先端は単位球の上の面積 $d\sigma$ をおおう．全曲率 K は $K=d\sigma/dS$ で与えられる．

その部分の面積を $d\sigma$ とする．このとき

$$K=\frac{d\sigma}{dS} \tag{16-8}$$

を Gauss の全曲率という．

$r=$一定の球面にこれを適用してみよう．微小面積は

$$dS=r^2\sin\theta d\theta d\varphi \tag{16-9}$$

と書くことができる（図 36)．一方 $d\sigma$ はこれに相当する立体角に他ならないから

$$d\sigma=\sin\theta d\theta d\varphi \tag{16-10}$$

である．(16-9), (16-10) を (16-8) に代入すると

$$K=\frac{1}{r^2} \tag{16-11}$$

を得る．これは球面上到る所一定である．

球面でない一般の曲面においても，ある点の近傍だけに注目すれば球面の一部と考えることができるであろう．そのような球の半径 r によって，その場所の全曲率 K が表わされる．ただしこの K は場所ごとに違った値をもつことになるであろう．しかしもっと次元数の高い超曲面の複雑な曲り方を表わすには全曲率だけでは不十分である．曲り方の一般的な記述法として Riemann は4階のテンソル $R_{\mu\nu,\rho\sigma}$ を導入した．"Riemann の曲率テンソル" と呼ばれるこの量については次の節で詳しく議論する．ここでは全曲率との関係について簡単に触れておくにとどめる．

Riemann テンソルを縮約して†

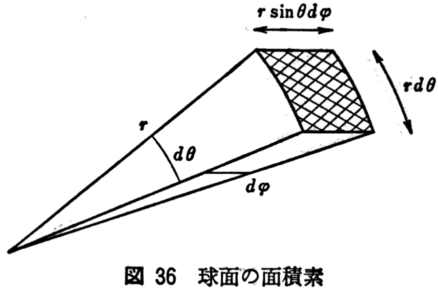


図 36　球面の面積素

† $R^{\sigma}{}_{\mu,\nu\sigma}$ のように縮約する本もある．これは (16-12) の符号を変えたものになる．

$$R_{\mu\nu}=R^{\sigma}{}_{\mu,\sigma\nu}=g^{\rho\sigma}R_{\rho\mu,\sigma\nu} \tag{16-12}$$

をつくると2階のテンソルになる．これは“Ricci テンソル”と名づけられる．さらにもう一度縮約すると“スカラー曲率”

$$R=R^{\mu}{}_{\mu}=g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} \tag{16-13}$$

が得られる．実は (16-8) の K との間には，次のような関係がある．

$$K=-R/2 \tag{16-14}$$

“平らな面”は $r=\infty$ で表わされると考えてよい．したがって $K=0$ であり，また $R=0$ でもある．2次元的な面に関してはこの逆も真である．すなわち $R=0$ ならばその面は平らである．しかしもっと次元数の高い超曲面に関しては必ずしもこうはならない．$R=0$ であっても Riemann テンソルの中にはゼロでない成分があり，完全に平らであるとはいえないことがある．

また2次元的な面に限っても，$R=0$ は最も素朴な意味の平面を意味しないことがある．たとえば円筒面がそうである．この場合には (16-8) の定義からいって全曲率はゼロである．

曲線に沿ってのベクトルの平行移動

曲面上の2点を最短距離で結ぶ曲線を“測地線”という．球面でいえば“大円”の一部がそれである．これは Euclid 空間における直線の概念の拡張であり，次に述べるようにベクトルの平行移動と密接な関係がある．

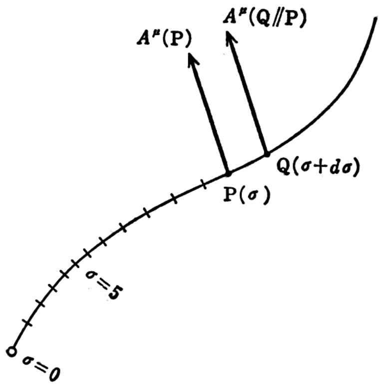


図 37
曲線上に沿ってベクトルを平行移動する．

考えている空間，または曲面の中に一つの曲線を引き，その上に目盛 σ をつける（図 37）．σ は曲線に沿っての長さであってもよいし，そうでなくてもよい．とにかく曲線上の点に順序をつけるパラメターでありさえすればよい．

曲線上の一点 P にベクトル $A^\mu(\mathrm{P})$ があるとする．それを近くの点 Q に平行移動する．P→Q の微小な距離を dx^λ と表わすことにすると (15-15) により

$$A^\mu(\mathrm{Q}//\mathrm{P})=A^\mu(\mathrm{P})-\Gamma^\mu{}_{\nu\lambda}(\mathrm{P})A^\nu(\mathrm{P})dx^\lambda \tag{16-15}$$

である．これをもって Q におけるベクトル $A^\mu(\mathrm{Q})$ と定義する．すなわち

$$A^\mu(\mathrm{Q})\equiv A^\mu(\mathrm{Q}//\mathrm{P}). \tag{16-16}$$

それをさらに近くの点 R に平行移動するという手順を繰り返していくと曲線上全体にわたって互いに平行なベクトル $A^\mu(\sigma)$ が分布する．

(16-16) を (16-15) に代入すると

$$A^\mu(\mathrm{Q})-A^\mu(\mathrm{P})+\Gamma^\mu{}_{\nu\lambda}(\mathrm{P})A^\nu(\mathrm{P})dx^\lambda=0 \tag{16-17}$$

となる．点 P はパラメター σ に対応し，点 Q はパラメター $\sigma+d\sigma$ に対応するものとする．$d\sigma$ で (16-17) の両辺を割ると

$$\frac{dA^\mu(\sigma)}{d\sigma}+\Gamma^\mu{}_{\nu\lambda}(\sigma)A^\nu(\sigma)\frac{dx^\lambda}{d\sigma}=0 \tag{16-18}$$

を得る．これが曲線に沿って平行移動されたベクトル $A^\mu(\sigma)$ の従うべき微分方程式である．

単位球面について (16-18) を調べてみよう．

まず曲線として等緯度線をとってみよう．つまり θ＝一定とし，パラメター σ としては φ 自身をとる．したがって

$$\frac{dx^1}{d\sigma}=\frac{d\theta}{d\varphi}=0,\qquad \frac{dx^2}{d\sigma}=\frac{d\varphi}{d\varphi}=1. \tag{16-19}$$

これらを (16-18) に代入する．さらに (16-7) の第1行を用いると

$$\begin{cases}\dfrac{dA^1(\varphi)}{d\varphi}-\sin\theta\cos\theta A^2(\varphi)=0 & \text{(16-20 a)}\\[2ex] \dfrac{dA^2(\varphi)}{d\varphi}+\cot\theta A^1(\varphi)=0 & \text{(16-20 b)}\end{cases}$$

となる．ここで A^μ は θ と φ との関数であるが，いまは θ を定数としているので書くのを省略した．

(16–20 a, b) を解くには，まず (16–20 a) を φ について微分して

$$\frac{d^2A^1(\varphi)}{d\varphi^2}-\sin\theta\cos\theta\frac{dA^2(\varphi)}{d\varphi}=0. \tag{16–21}$$

これに (16–20 b) を代入すると $A^1(\varphi)$ のみに関する方程式になる．

$$\frac{d^2A^1(\varphi)}{d\varphi^2}+\cos^2\theta A^1(\varphi)=0. \tag{16–22 a}$$

同様の手続きを $A^2(\varphi)$ について行なうと

$$\frac{d^2A^2(\varphi)}{d\varphi^2}+\cos^2\theta A^2(\varphi)=0 \tag{16–22 b}$$

を得る．この解は簡単で

$$A^\mu(\varphi)=a^\mu\cos(\varphi\cos\theta)+b^\mu\sin(\varphi\cos\theta) \tag{16–23}$$

と与えられる．ただし四つの定数 a^1, b^1, a^2, b^2 の間には関係がある．たとえば (16–23) を (16–20 a) に代入すると

$$\begin{aligned}&[-a^1\sin(\varphi\cos\theta)+b^1\cos(\varphi\cos\theta)]\cos\theta\\&\quad-[a^2\cos(\varphi\cos\theta)+b^2\sin(\varphi\cos\theta)]\sin\theta\cos\theta=0\end{aligned} \tag{16–24}$$

となるが，これが任意の φ に対して満足されるためには

$$a^1=-b^2\sin\theta,\qquad b^1=a^2\sin\theta \tag{16–25}$$

となっていなければならない．したがって (16–23) は

$$\begin{cases}A^1(\varphi)=a^1\cos(\varphi\cos\theta)+b^1\sin(\varphi\cos\theta)\\ A^2(\varphi)=\dfrac{1}{\sin\theta}[b^1\cos(\varphi\cos\theta)-a^1\sin(\varphi\cos\theta)]\end{cases} \tag{16–26}$$

となる．さらに場合を限定して

$$A^1(0)=0,\qquad A^2(0)=1 \tag{16–27}$$

と選んでみよう．つまり $\varphi=0$ で A^μ は緯度線に平行であるとするのである．(16–27) のような“初期条件”を満たすためには $a^1=0$, $b^1=\sin\theta$ とおけばよい．したがって

$$A^1(\varphi)=\sin\theta\sin(\varphi\cos\theta),\qquad A^2(\varphi)=\cos(\varphi\cos\theta) \tag{16–28}$$

を得る．

曲線を赤道としてみよう．つまり $\theta=\pi/2$ とおく．この場合は大変簡単で (16–28) は

$$A^1(\varphi)=0,\qquad A^2(\varphi)=1 \tag{16–29}$$

となる．つまり $\varphi=0$ で赤道に平行であったベクトルは，赤道上に沿って平行移動させると常に赤道に平行のままであることがわかる（図 38).

$\theta\neq\pi/2$ とするとこのように簡単にはならない．$\varphi=0$ で (16-27) のようなベクトルが (16-28) に従ってどのように変化するかを見るために，曲線上の各点に接平面を貼りつけ，その上に描かれたベクトル $\boldsymbol{A}$ を1枚の面に重ねて示してみよう．$\theta=\pi/4$ に対しては図 39 のようになる．つまり $\varphi=0$ で緯度線に平行であったベクトルは平行移動によって緯度線の方向からずれて“回転する”．これは赤道以外の緯度線が測地線でないことと関係がある．さらに注意すべきことは $\varphi=2\pi$ に対して (16-28) は

$$A^1(2\pi)=\sin\theta\sin(2\pi\cos\theta),\qquad A^2(2\pi)=\cos(2\pi\cos\theta)\qquad(16\text{-}30)$$

となることである．すなわち等緯度線を一まわりしてもとの場所に戻ってきても A^μ の各成分は初めの値には戻らないのである．実はこれこそ，球面が曲がっていることの端的な表現であり，次節で Riemann テンソルに関連して

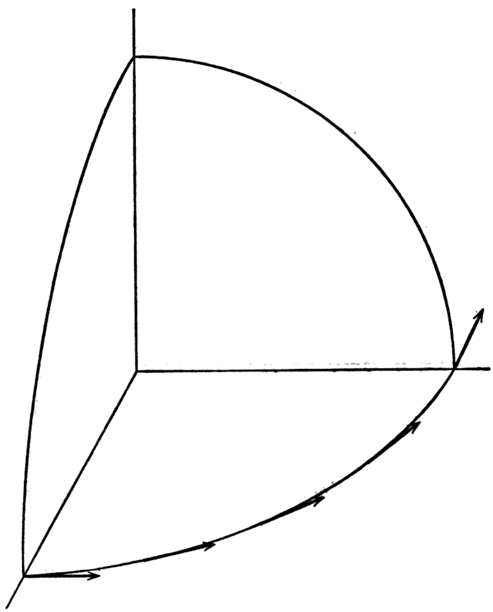
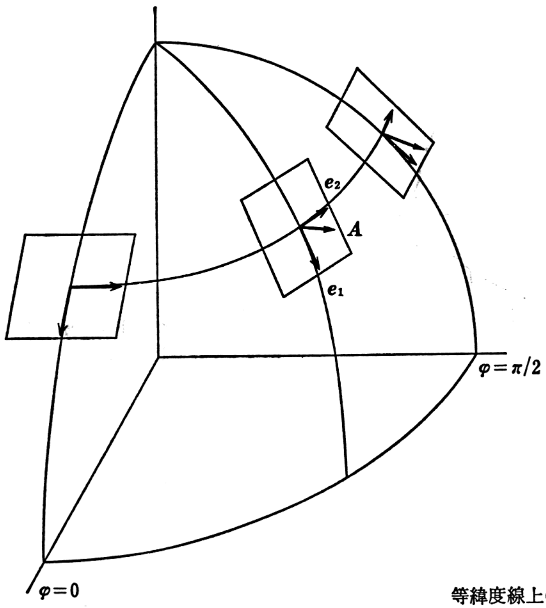
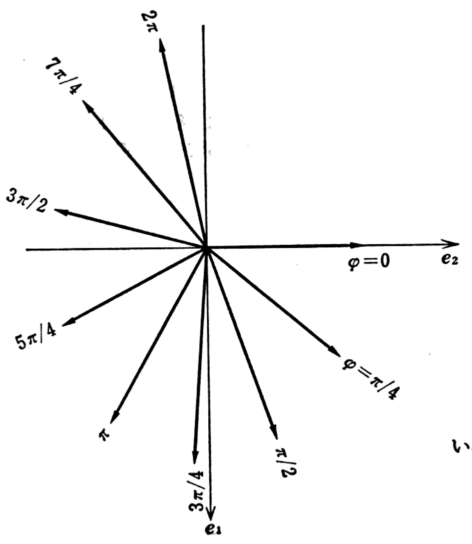


図 38
赤道に平行なベクトルを赤道に沿って平行移動する．



(a)
等緯度線上の各点に接平面を貼りつける.



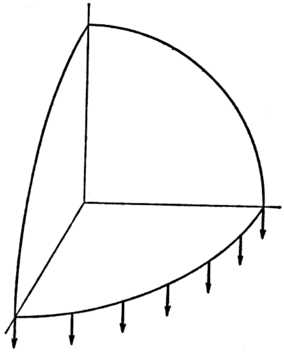
(b)
いろいろなφの値における接平面の上で

$$A_1(\varphi)=A^1(\varphi)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{\varphi}{\sqrt{2}}\right)$$

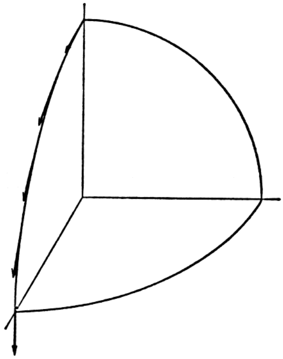
$$A_2(\varphi)=\frac{1}{2}A^2(\varphi)=\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\varphi}{\sqrt{2}}\right)$$

を示したもの. $\theta=\pi/4$ としてある.

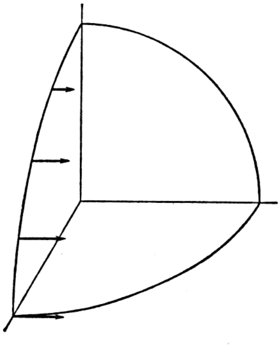
図 39



(a)
赤道に垂直なベクトルを赤道に沿って平行移動する.



(b)
子午線に平行なベクトルを子午線に沿って平行移動する.



(c)
子午線に垂直なベクトルを子午線に沿って平行移動する.

図 40

一般的に議論される点である．

以上のような結果は，地球儀を3次元的な世界から眺める見方からするといささか奇妙なようにも思われよう．ここで二つのベクトルの間の“平行性”というのは (16-15) によって定義された関係である．もともと (16-15) の意味は §14 や §15 で議論されたのであったが，そのときには背後に直交座標があり，“常識的な”意味での平行という概念に一致するように考えられたものであった．しかし Euclid 空間という足場を外された平行移動の概念は今やひとり歩きを始めたのである．曲面それ自身の言葉による平行概念がどのようなものであるか，もう少し球面の考察を続けてみよう．

(16-27)，(16-28) では赤道に平行なベクトルを平行移動させたのであったが，今度は $\varphi=0$ で赤道に垂直なベクトルを考え，それを赤道に沿って平行移動させてみる．それには (16-27) の代りに $A^1(0)=1$，$A^2(0)=0$ とおけばよい．計算は全く同様に行なうことができるので省略する．結果もやはり同様で，平行移動されたベクトルはどこでも赤道に垂直である（図 40（a））．さらに赤道に対してある角度をなしているベクトルを赤道に沿って平行移動すれば，赤道に対して同じ角度を保ち続けることも容易に推測される．

このような簡単な結果が得られることについては理由がある．すなわち赤道上というのはこの球の大円であり，測地線であるということである．実際，大円に沿ってベクトルを平行移動すれば，そのベクトルはその大円に対していつも同じ角度をなし続けるのである．赤道以外の簡単な例としては子午線に沿って，これに平行，または垂直なベクトルを平行移動させる場合を考えてみればよい．(16-19) 以下の計算を少し修正してやれば，結局同じ結論に達することが確かめられるであろう（図 40 の（b），（c））．

測地線の方程式

赤道上に沿ってベクトルを平行移動する場合を思い出してみよう．初め赤道に平行なベクトルを考えたが，そのようなベクトルというのはすなわち赤道に対する“接線ベクトル”に他ならない．このように見ると，赤道は，その上の各点の接線ベクトルがどれも互いに平行であるような曲線であるということができる．この事情は赤道上に限らず，どんな大円についても成り立つものと考

えてよい（図 41).

ところで曲線の接線ベクトルはどのように表わされるであろうか．それは

$$\lim_{\Delta\sigma\to 0}\frac{x^\mu(x+\Delta\sigma)-x^\mu(\sigma)}{\Delta\sigma}=\frac{dx^\mu}{d\sigma} \tag{16-31}$$

で与えられる．説明は図 42 を見てほしい．これを $A^\mu(\sigma)$ として (16-18) に代入すると

$$\frac{d^2x^\mu}{d\sigma^2}+\Gamma^\mu{}_{\nu\lambda}\frac{dx^\nu}{d\sigma}\frac{dx^\lambda}{d\sigma}=0 \tag{16-32}$$

となる．これが大円の方程式のはずである．実際赤道上ならば $x^1=\theta=\pi/2$, $x^2=\varphi=\sigma$ で，かつ (16-7) によれば（添字が 1 または 2 の）$\Gamma^\mu{}_{\nu\lambda}$ は $\theta=\pi/2$ に対してすべてゼロであるので (16-32) は確かに満たされている．

もし，一般的にいって**測地線とは，その上のすべての接線ベクトルが互いに平行となるような曲線**であるとするならば，(16-32) は“測地線の方程式”である．しかしそれが 2 点間を結ぶ最短距離であるかどうかはまだ明らかではな

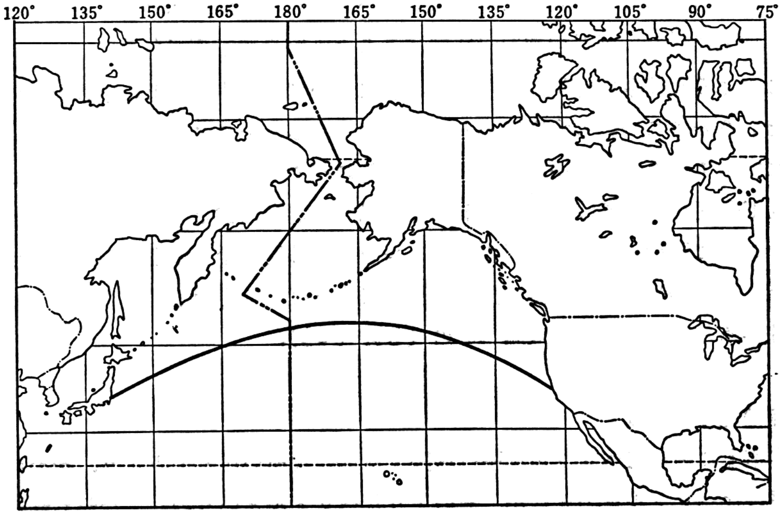


図 41 東京—San Fransisco 間の大圏（大円）コース

この上を飛ぶ飛行機は，ちょうど赤道や子午線に沿って飛ぶのと同様に“まっすぐ”飛んでいるのであるが，針路（接線方向）と子午線のなす角は刻々に変わる．これは基底の方が変化するからである．

い．このことを証明するには“変分原理”を活用するのが最適であるが，ここでは立ち入らない．球面の場合からの類推で一般証明に代えることにしておこう．

直線座標系においては $\Gamma^{\mu}{}_{\nu\lambda}=0$ であるので (16-32) は

$$\frac{d^2x^\mu}{d\sigma^2}=0 \tag{16-33}$$

に移行する．これは直線の方程式である．このようにして測地線とは平らな空間における直線の概念に相当するものであることが裏づけられる．

再び球面の例に戻ってみよう．図 40 の（a），（b）を組み合わせてみると子午線はどれも互いに平行な測地線であることがわかる．これらはすべて北極と南極で交わる．これは球面における平行な 2 線の例としてよく知られたものである†．もう一つよく引き合いに出される例を述べておこう．

図 43 のように点 P で赤道に平行なベクトル $\boldsymbol{A}$(P) を考える．これを北極 Q に平行移動させるのに二つの道筋をとってみる．第 1 は赤道上を点 R まで経度 90° だけ進み，そこから北上して Q に向かうものとする．もう一つは P から直ちに真北に進んで北極に到達するものである．第 1 の道筋に沿って進むと R におけるベクトルはやはり赤道に平行である．これを子午線に沿って平

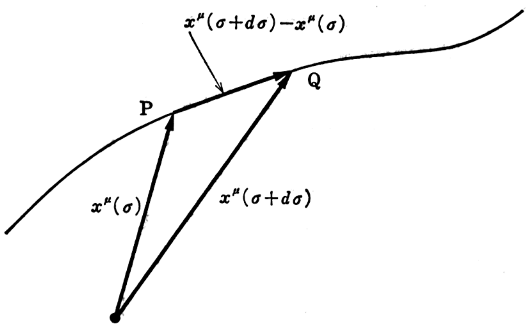


図 42

曲線の接線ベクトルは $[x^\mu(x+d\sigma)-x^\mu(\sigma)]/d\sigma=dx^\mu(\sigma)/d\sigma$ で与えられる．

† 英語では緯度線のことを parallel と呼ぶ．二つの緯度線は常に等間隔を保ち，交わることがないことからつけられた名前であるが，Riemann 幾何学の意味ではあまり適切ではない．図 40 の（c）から見ると，緯度線の接線は，同じ子午線の上にある場合に限り平行である．緯度線は，赤道を除き，そもそも測地線ではない．

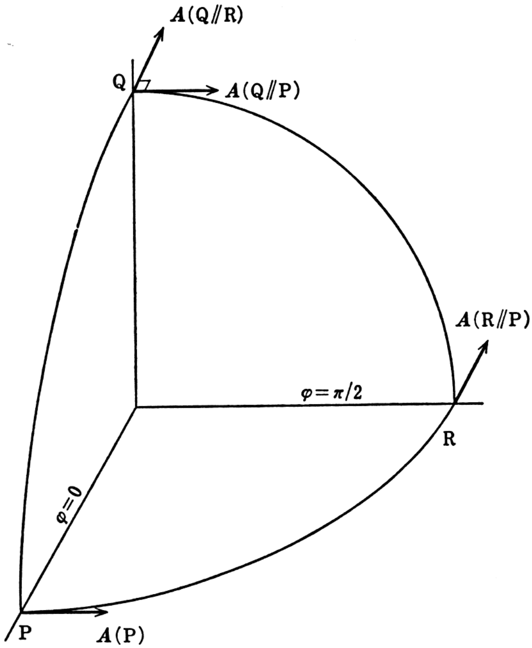


図 43
赤道上の点Pで赤道に平行なベクトルを，赤道上 PR と子午線上 RQ に沿って平行移動するのと，直接子午線 PQ に沿って平行移動するのとは異なった結果を与える．

行移動させると，ベクトルは子午線に垂直のまま北極に達し，図の $\boldsymbol{A}$(Q//R) となる．一方第2の道筋に沿って進むとベクトルは $\boldsymbol{A}$(Q//P) となり，第1の道筋を通ってきたものとはちょうど直交することになる．すなわち**ベクトルの平行移動の結果はどの道筋を通ってきたかによって異なる**のである．同じことであるが，ベクトルを曲面上の閉曲線に沿って一まわりさせると，初めとは違ったものになる．同様な例には (16-30) ですでに出会っている．

局所直線座標系

球面の場合，(16-7) の第 1 行を見ると $\theta=\pi/2$ では接続係数がゼロになることがわかる．これは赤道上では，θ, φ という座標がちょうど局所直交座標系に一致していることを示している．これは偶然ではない．それは赤道上では

座標軸，つまり θ＝一定，φ＝一定という線がどちらも測地線になっているからである．このことは，球面上の他の点において局所直交座標系をつくるにはどうすればよいかを示している．ある点Pを考えよう．この点を通る大円を一つ描く．これを赤道とするような新たな極座標 θ', φ' に変換する．これが点Pにおける局所直交系となる．ところで点Pを通る大円は無数に描くことができる．したがって局所直交系も無数に存在する．

このような事情は球面に限らず一般に成り立つものである．すなわち任意の点で，その点を通る測地線の適当な組合せで座標系を組み立てると，それが局所直線座標系になる．前節の最後に示した方法は，このような手続きを自動的に与える一つの処方なのである．局所直線座標系は一意的ではなく，別々の局所直線座標系の間の座標変換は線型である．

§17 Riemann 曲率テンソル

平行移動の繰返し

前節では簡単な実例について，ベクトルの平行移動の結果は途中の道筋によって変わることを示した．この節ではこのような事柄の一般論を展開する．

任意の次元数の空間の中で点 P から点 R まで行く二つの道筋を考える（図

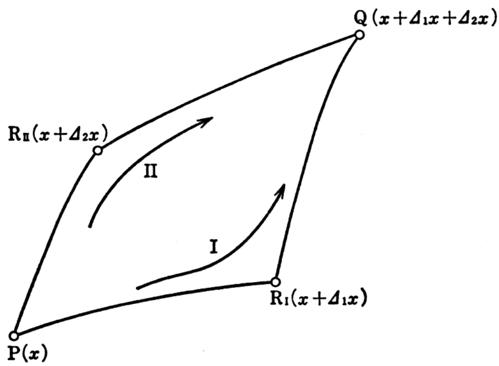


図 44
ベクトルを点Pから点Qまで平行移動するのに二つの道筋
I ($P \to R_I \to Q$) と II ($P \to R_{II} \to Q$) を考える．

44)．点 P の座標を x^μ とする．点 $\mathrm{R_I}$ はそれから微小距離 $\Delta_1 x^\mu$ 離れた所にあり，さらに微小距離 $\Delta_2 x^\mu$ 進んだ所が点 Q である．この道筋を I と名づける．もう一つの道筋 II では，P から出発してまず $\Delta_2 x^\mu$ 離れた点 $\mathrm{R_{II}}$ に行き，それから $\Delta_1 x^\mu$ 進んで点 Q に達する．

点 P における共変ベクトル $A_\mu(\mathrm{P})$ を点 $\mathrm{R_I}$ まで平行移動しよう．(14-26) に従ってそれは

$$A_\mu(\mathrm{R_I}//\mathrm{P}) = A_\mu(\mathrm{P}) + \Gamma^\nu{}_{\mu\lambda}(\mathrm{P}) A_\nu(\mathrm{P}) \Delta_1 x^\lambda \tag{17-1}$$

で与えられる．次にこの $A_\mu(\mathrm{R_I}//\mathrm{P})$ を点 Q まで平行移動する．その結果を $A_\mu(\mathrm{Q})_\mathrm{I}$ と書くと

$$A_\mu(\mathrm{Q})_\mathrm{I} = A_\mu(\mathrm{R_I}//\mathrm{P}) + \Gamma^\rho{}_{\mu\sigma}(\mathrm{R_I}) A_\rho(\mathrm{R_I}//\mathrm{P}) \Delta_2 x^\sigma \tag{17-2}$$

である．(17-2) に (17-1) を代入する．その際，(17-2) の第 2 項において

$$\Gamma^\rho{}_{\mu\sigma}(\mathrm{R_I}) = \Gamma^\rho{}_{\mu\sigma}(\mathrm{P}) + \partial_\kappa \Gamma^\rho{}_{\mu\sigma}(\mathrm{P}) \cdot \Delta_1 x^\kappa \tag{17-3}$$

と展開しておき，$\Delta_1 x \cdot \Delta_2 x$ の微小量までを残すことにする．このやり方ですべての量は点 P における値によって表わされる．その結果は

$$\begin{aligned} A_\mu(\mathrm{Q})_\mathrm{I} = {} & A_\mu(\mathrm{P}) + \Gamma^\nu{}_{\mu\lambda}(\mathrm{P}) A_\nu(\mathrm{P}) \Delta_1 x^\lambda + \Gamma^\rho{}_{\mu\sigma}(\mathrm{P}) A_\rho(\mathrm{P}) \Delta_2 x^\sigma \\ & + [\partial_\kappa \Gamma^\rho{}_{\mu\sigma}(\mathrm{P}) + \Gamma^\tau{}_{\mu\sigma}(\mathrm{P}) \Gamma^\rho{}_{\tau\kappa}(\mathrm{P})] A_\rho(\mathrm{P}) \Delta_1 x^\kappa \Delta_2 x^\sigma \end{aligned} \tag{17-4}$$

となる．

$A_\mu(\mathrm{Q})_\mathrm{II}$ を得るには (17-4) において $\Delta_1 x$ と $\Delta_2 x$ とをとり換えればよい．そして (17-4) から差し引く．(17-4) の右辺の第 1 行は，$A_\mu(\mathrm{Q})_\mathrm{II}$ のこれに相当する項によって完全に相殺される．残りの項は

$$A_\mu(\mathrm{Q})_\mathrm{I} - A_\mu(\mathrm{Q})_\mathrm{II} = -R^\rho{}_{\mu,\kappa\sigma}(\mathrm{P}) A_\rho(\mathrm{P}) \Delta_1 x^\kappa \Delta_2 x^\sigma \tag{17-5}$$

と書くことができる．ここで $R^\rho{}_{\mu,\kappa\sigma}$ は

$$R^\rho{}_{\mu,\kappa\sigma} = -\partial_\kappa \Gamma^\rho{}_{\mu\sigma} + \partial_\sigma \Gamma^\rho{}_{\mu\kappa} - \Gamma^\tau{}_{\mu\sigma} \Gamma^\rho{}_{\tau\kappa} + \Gamma^\tau{}_{\mu\kappa} \Gamma^\rho{}_{\tau\sigma} \tag{17-6}$$

で与えられる．これが Riemann 曲率テンソルである†．

(17-5) はまた，$\mathrm{P} \to \mathrm{R_I} \to \mathrm{Q} \to \mathrm{R_{II}} \to \mathrm{P}$ という閉曲線を一まわりしてベクトルを平行移動させたときに，ベクトルがもとの値に戻らない分量を表わしているといってもよい．(17-5) の右辺の $\Delta_1 x^\kappa \Delta_2 x^\sigma$ はこの閉曲線のかこむ面積を与える．任意のベクトルおよび任意の道筋に対して (17-5) の右辺がゼロになるのは $R^\rho{}_{\mu,\kappa\sigma}$ のすべての成分が全部ゼロの場合に限る．

† (17-6) とはちょうど反対符号に定義することもある．

Riemann テンソルは本当にテンソルであろうか．(17-6) の式からはこのことは自明とはいえない．なぜならば接続係数はテンソルではないからである．しかし実際には接続係数の非テンソル的な部分は互いに相殺して $R^{\rho}{}_{\mu,\kappa\sigma}$ はテンソルなのである．そのことの証明は次に与えられる．

共変微分の非可換性

一つの共変ベクトル A_σ に対してその共変微分は (14-22) により

$$\nabla_\nu A_\sigma = \partial_\nu A_\sigma - \Gamma^{\rho}{}_{\nu\sigma} A_\rho \tag{17-7}$$

で与えられる．この2階の共変テンソルをもう一度共変微分する．(15-23) と同様にして計算すると

$$\nabla_\mu \nabla_\nu A_\sigma = \partial_\mu(\nabla_\nu A_\sigma) - \Gamma^{\tau}{}_{\mu\nu}\nabla_\tau A_\sigma - \Gamma^{\tau}{}_{\mu\sigma}\nabla_\nu A_\tau \tag{17-8}$$

となる．これに (17-7)，またはこれと同等な式を代入すると

$$\begin{aligned}\nabla_\mu \nabla_\nu A_\sigma = {} & \partial_\mu\partial_\nu A_\sigma - (\partial_\mu \Gamma^{\rho}{}_{\nu\sigma})A_\rho - \Gamma^{\rho}{}_{\nu\sigma}\partial_\mu A_\rho \\ & - \Gamma^{\tau}{}_{\mu\nu}(\partial_\tau A_\sigma - \Gamma^{\theta}{}_{\tau\sigma}A_\theta) - \Gamma^{\tau}{}_{\mu\sigma}(\partial_\nu A_\tau - \Gamma^{\theta}{}_{\nu\tau}A_\theta)\end{aligned} \tag{17-9}$$

を得る．次に μ と ν とを交換した式 $\nabla_\nu \nabla_\mu A_\sigma$ をつくって (17-9) から差し引く．そうすると (17-9) の右辺の第1項は

$$\partial_\mu\partial_\nu A_\sigma - \partial_\nu\partial_\mu A_\sigma = 0 \tag{17-10}$$

によって消されてしまう．また (17-9) の右辺の第3項と第6項を足したものは μ, ν について対称なので，この引き算によってなくなる．さらに (17-9) の右辺の第 4, 5 項は，$\Gamma^{\tau}{}_{\mu\nu} = \Gamma^{\tau}{}_{\nu\mu}$ のために μ, ν について対称であり，$\nabla_\nu \nabla_\mu A_\sigma$ の中の同様な項によって相殺される．結局残るのは

$$(\nabla_\mu \nabla_\nu - \nabla_\nu \nabla_\mu)A_\sigma = (\partial_\nu \Gamma^{\rho}{}_{\mu\sigma} - \partial_\mu \Gamma^{\rho}{}_{\nu\sigma} + \Gamma^{\tau}{}_{\mu\sigma}\Gamma^{\rho}{}_{\tau\nu} - \Gamma^{\tau}{}_{\nu\sigma}\Gamma^{\rho}{}_{\tau\mu})A_\rho \tag{17-11}$$

であるが，この右辺に現われたのはまさに，(17-6) で導入された Riemann テンソルに他ならない．こうして

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]A_\sigma = R^{\rho}{}_{\sigma,\mu\nu}A_\rho \tag{17-12}$$

という重要な結果が得られた．ここで左辺に用いた記号は

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] \equiv \nabla_\mu \nabla_\nu - \nabla_\nu \nabla_\mu \tag{17-13}$$

という“交換子”である．

(17-12) によれば**共変微分は一般に可換でなく，その非可換部分が Riemann**

テンソルで表わされる．これは普通の微分が可換であること［(17-10)］と著しい対照をなしている．また (17-5) は，**二つの平行移動は一般に可換でなく，その差は Riemann テンソルで与えられる**ということを表わしている．この意味で (17-5) と (17-12) は同じことの異なった表現であるにすぎない．

ところで $\nabla_\nu A_\sigma$ はテンソルであり，その共変微分もまたテンソルである．したがって (17-12) の左辺は 3 階のテンソルである．当然右辺もテンソルでなくてはならないから，$R^\rho{}_{\sigma,\mu\nu}$ は 4 階の混合テンソルであることが結論される．これが以前約束したテンソル性の証明である．

Riemann テンソルの対称性

(17-6) で定義された Riemann テンソルから純粋に共変なテンソルをつくる．

$$R_{\rho\sigma,\mu\nu}=g_{\rho\lambda}R^\lambda{}_{\sigma,\mu\nu}. \qquad (17\text{–}14)$$

ここで局所直交座標系に座標変換してみよう．この座標系では

$$g_{\mu\nu}=\bar{g}_{\mu\nu}, \qquad \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}=0 \qquad (17\text{–}15)$$

である．第 2 式は定義式（たとえば (14-8 a)）からわかるように

$$\partial_\rho g_{\mu\nu}=0 \qquad (17\text{–}16)$$

を意味する．しかし $g_{\mu\nu}$ の 2 階微分 $\partial_\rho\partial_\sigma g_{\mu\nu}$ はゼロでないとする．もしこれもゼロであるとすると Riemann テンソルは完全にゼロとなってしまうが，我々はそうでない場合を調べたいのである．

(17-15) を (17-6)，(17-14) に代入すると

$$R_{\rho\sigma,\mu\nu}=\frac{1}{2}\underbrace{\bar{g}_{\rho\lambda}\bar{g}^{\lambda\tau}}_{\hookrightarrow\delta_\rho{}^\tau}[(\partial_\mu\partial_\nu g_{\tau\sigma}+\partial_\sigma\partial_\nu g_{\tau\mu}-\partial_\tau\partial_\nu g_{\sigma\mu})-(\mu\leftrightarrow\nu)]$$

$$=\frac{1}{2}(\partial_\sigma\partial_\nu g_{\rho\mu}-\partial_\rho\partial_\nu g_{\sigma\mu}-\partial_\sigma\partial_\mu g_{\rho\nu}+\partial_\rho\partial_\mu g_{\sigma\nu}) \qquad (17\text{–}17)$$

となる．この式をよく見ると

$$R_{\rho\sigma,\mu\nu}=-R_{\rho\sigma,\nu\mu}=-R_{\sigma\rho,\mu\nu}=R_{\mu\nu,\rho\sigma} \qquad (17\text{–}18)$$

という関係が得られる．先に述べたように Riemann テンソルはテンソルであるから，これらの関係は局所直交座標系に限らずすべての座標系で成り立つのである．ただ，一般の座標系では (17-18) のような対称性を直接見つけるこ

とが困難であるというだけである（もっとも (17–18) の最初の関係だけは (17–6) からすぐにわかる）.

さらに $R_{\rho\sigma,\mu\nu}$ の，あとの方の3添字を循環的に入れ換えると

$$R_{\rho\sigma,\mu\nu}+R_{\rho\mu,\nu\sigma}+R_{\rho\nu,\sigma\mu}=0 \tag{17-19}$$

が成り立つことも (17–17) から確かめられる.

(17–18) の対称性を2次元の場合に適用してみよう．すなわち添字はすべて 1, 2 という二つの値しかとらないものとする．(17–18) の第1式，第2式からは $\rho=\sigma$，または $\mu=\nu$ のような成分はゼロであることがわかる．結局この場合独立な成分は $R_{12,12}$ 一つだけである（たとえば $R_{12,21}$ は $-R_{12,12}$ に等しい）．これを球面の場合について計算してみる．それには (16–4), (16–5), (16–7) を (17–6), (17–14) に代入すればよい．計算の詳細は読者の練習問題としよう．結果は

$$R_{12,12}=-r^2\sin^2\theta \tag{17-20}$$

である．さらに (16–12) によって Ricci テンソルを計算すると

$$R_{11}=1, \qquad R_{22}=-\sin^2\theta, \qquad R_{12}=R_{21}=0 \tag{17-21}$$

となる．これを (16–13) に代入すればスカラー曲率が得られる.

$$R=\frac{1}{r^2}R_{11}+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}R_{22}=\frac{2}{r^2}. \tag{17-22}$$

これが前に結果だけ示しておいた (16–14)（と (16–11) を組み合わせたもの）に他ならない.

(17–20) を見ると $R_{12,12}$ は赤道上でもゼロでない $(=-r^2)$．これを (17–6) にあてはめてみると，$\partial_\kappa\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}$ がゼロではないことになる．なぜならば，(16–7) の第1行によって $\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}$ は赤道上でゼロだからである．これは $\theta=\pi/2$ では θ, φ がすでに局所直交系であるのに，赤道から少しでもはずれると $\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}$ はゼロでなくなり，θ, φ はもはや局所直交系ではなくなるという当然の事柄を表わしている.

前節の議論によれば球面上のどんな点でも常に局所直線座標系に移ることが可能である．すなわち $\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}$ をゼロにすることができる．それは $\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}$ がテンソルでないためであった．これに反して $R_{\rho\sigma,\mu\nu}$ はテンソルであるので座標変換によってその成分をすべてゼロにすることはできない．したがって接続係数

の微分には必ずゼロでないものが残る．このようなわけで球面上の**すべての点で**接続係数をゼロにすることは不可能である．直線座標系をつくることはできるが，それはあくまで局所的なものにとどまる．

この事情はきわめて一般的な場合にそのまま成り立つ．Riemann テンソルの成分の中にゼロでないものが一つでもあれば，それは空間が本質的に曲がっていることを意味し，各点の近傍で局所直線（または直交）座標系をつくることはできるが，それ以上に大域的に平らな座標系をつくることは不可能である．

Bianchi 恒等式

Riemann テンソルについてはもう一つ，共変微分を含んだ重要な関係式がある．

$$\nabla_\lambda R_{\rho\sigma,\mu\nu}+\nabla_\mu R_{\rho\sigma,\nu\lambda}+\nabla_\nu R_{\rho\sigma,\lambda\mu}=0. \qquad (17\text{-}23)$$

これは Riemann テンソルのあとの方の二つの添字と共変微分の添字とを循還的に入れ換えてつくられるもので "Bianchi の恒等式" と呼ばれる．この証明も局所直交座標系で行なうと比較的容易である．局所直交座標系では共変微分は単なる微分になってしまうので $\nabla_\lambda R_{\rho\sigma,\mu\nu}\to\partial_\lambda R_{\rho\sigma,\mu\nu}$ としてよい．しかしこの式の右辺には微分があるので直ちに (17-17) を使うことは許されない．元来の式 (17-6) と (17-14) を代入する．

$$\nabla_\lambda R_{\rho\sigma,\mu\nu}\to\partial_\lambda[g_{\rho\kappa}(-\partial_\mu\Gamma^\kappa{}_{\sigma\nu}+\partial_\nu\Gamma^\kappa{}_{\sigma\mu}-\Gamma^\tau{}_{\sigma\nu}\Gamma^\kappa{}_{\tau\mu}+\Gamma^\tau{}_{\sigma\mu}\Gamma^\kappa{}_{\tau\nu})]. \qquad (17\text{-}24)$$

ここで ∂_λ が $g_{\rho\kappa}$ にかかる項は (17-16) によって落としてよい．また ∂_λ が (17-24) 右辺のかっこの中の第 3, 4 項にかかる項も (17-15) のおかげでゼロにすることができる．結局 (17-24) は

$$\nabla_\lambda R_{\rho\sigma,\mu\nu}\to\bar{g}_{\rho\kappa}(-\partial_\lambda\partial_\mu\Gamma^\kappa{}_{\sigma\nu}+\partial_\lambda\partial_\nu\Gamma^\kappa{}_{\sigma\mu}) \qquad (17\text{-}25)$$

となる．

μ, ν, λ を循還的に入れ換えた式を二つ書いておき，(17-25) とともに加え合わせると右辺の各項は全部打ち消し合うことが確かめられる．したがって (17-23) は局所直交座標系で成り立っていることがわかった．ところが (17-23) の各項はテンソルであるから，この関係式はどんな座標系においても成り

立つことになる．

(17-23) に $g^{\sigma\nu}$ をかける．(15-21) によって $\nabla_\lambda g^{\sigma\nu}=0$ であるから $g^{\sigma\nu}$ は共変微分の記号の右側へもってくることができ，

$$\nabla_\lambda(g^{\sigma\nu}R_{\rho\sigma,\mu\nu})+\nabla_\mu(g^{\sigma\nu}R_{\rho\sigma,\nu\lambda})+\nabla_\nu(g^{\sigma\nu}R_{\rho\sigma,\lambda\mu})=0 \tag{17-26}$$

を得る．これは (16-12) を用いて

$$\nabla_\lambda R_{\rho\mu}-\nabla_\mu R_{\rho\lambda}-\nabla_\nu R_\rho{}^\nu{}_{,\lambda\mu}=0 \tag{17-27}$$

となる．さらに $g^{\rho\mu}$ をかけると前と同様にして

$$\nabla_\lambda R-2\nabla_\mu R^\mu{}_\lambda=0 \tag{17-28}$$

が得られる．ここで R はスカラー曲率 (16-13) である．

もう少し変型しておこう．(17-28) の左辺第 1 項は $\nabla_\mu(\delta^\mu{}_\lambda R)$ と書いてよい．したがって (17-28) は

$$\nabla_\mu\left(R^\mu{}_\lambda-\frac{1}{2}\delta^\mu{}_\lambda R\right)=0 \tag{17-29}$$

とも書ける．または

$$G^{\mu\nu}=R^{\mu\nu}-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}R \tag{17-30}$$

によって "Einstein テンソル" を導入すると (17-29) は

$$\nabla_\mu G^{\mu\nu}=0 \tag{17-31}$$

という型にすることができる．これは Einstein が重力場の方程式を導く際に決定的な役割を果たした関係式である．

第 4 章

一般相対論

§18　4 次元 Riemann 空間

この章では Riemann 幾何学を使っていよいよ一般相対論を定式化する．我々の時空は四つの座標 x^0, x^1, x^2, x^3 で記述される．この時空の中で，一つの事象は一つの世界点で表わされる．ここまでは Minkowski 時空による特殊相対論の記述と同じである．しかし重力がある場合には空間の幾何学はもっと一般的な Riemann 幾何学であり，我々は4次元の Riemann 空間の中にいることになる．第 2 章で述べた一般相対性原理と等価原理を，Einstein は次のように定式化する．

（I） **一般相対性原理**：物理学の基本方程式は Riemann 幾何学の意味でテンソルの型で書かれなければならない．（このように書いておけば方程式はどんな座標系でも同じ型になることが保証される．このとき方程式は一般座標変換に対して共変な型であるという．）

（II）　**等価原理**：ある世界点の近傍では局所 Lorentz 系が存在する．この座標系では無重力であり，特殊相対論が成り立つ（これは 66 ページの（II′）で述べた表現に相当する）．

第3章では平らな局所座標系として Euclid 空間の直線座標系または直交座標系を考えてきたが，上述の（II）は，これが Minkowski 空間の Lorentz 座標系であるべきだと主張しているのである．ここに **Riemann 幾何学という数学と現実の物理学との接点がある．**

もちろん Lorentz 系は直線座標系であるので接続係数はゼロであり，第3章で得た種々の結果は，$\bar{g}_{\mu\nu}$ として $\delta_{\mu\nu}$ の代りに Minkowski 計量 $\eta_{\mu\nu}$ を用いるだけでほとんど変更なしに使うことができる．この考えによれば**重力の存在は計量 $g_{\mu\nu}(x)$ が $\eta_{\mu\nu}$ からずれることによって表わされる．**

4次元であるから対称テンソル $g_{\mu\nu}$ は 10 個ある．また μ, ν について対称な $\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}$ は 40 個，$R_{\rho\sigma,\mu\nu}$ の独立成分は 20 個ある．この最後の点についての詳しい説明は省略するが，Riemann テンソルの対称性 (17-18), (17-19) を余す所なく利用すればこの結論が得られる．読者自ら試みてみられたい．

特殊相対論では不変な線素は†

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} \tag{18-1}$$

で与えられた．dx^{μ} が時間的な場合には

$$ds^2 = -(d\tau)^2 \tag{18-2}$$

と書くと $d\tau$ は固有時であり，座標系に対して静止している時測で測る時間という意味があった．

$$d\tau = dw = c\,dt. \tag{18-3}$$

一般相対論では (18-1) は

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x) dx^{\mu} dx^{\nu} \tag{18-4}$$

と一般化される．また固有時 $d\tau$ は (18-2) と同じ関係式によって定義される．しかし関係式 (18-3) は変更を受ける．座標系に対してとまっている時計については

$$dx^i = 0 \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{18-5}$$

† §3 (15 ページ) でも述べたように (18-1) の右辺は定符号ではない．その意味で $(ds)^2$ ではなく ds^2 と書く．

であるから (18–4) と (18–2) からは

$$-(d\tau)^2 = g_{00}(dx^0)^2 \tag{18-6}$$

が得られる．したがって

$$g_{00} < 0 \tag{18-7}$$

ならば

$$d\tau = \sqrt{-g_{00}}\,dx^0 = \sqrt{-g_{00}}\,c\,dt \tag{18-8}$$

となる．(18–3) とは $\sqrt{-g_{00}}$ だけ違うことに注意．あとで見るようにこれは重力の効果を表わす重要な項である．

§19 質点の運動方程式

測　地　線

重力の存在によって曲がっている時空の中にある質点はどのような運動をするであろうか．**重力以外に何も力を受けていない質点は測地線に沿って動く**と考えるのがもっともであろう．これは明らかに重力がない場合の自由な質点の直線運動に対応するものであり，慣性の法則の自然な拡張である．

質点の世界線は時間的であろうから，それに沿った目盛は固有時 τ に選ぶのがよいであろう．そうすると測地線の方程式 (16–32) は

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu{}_{\nu\lambda}\frac{dx^\nu}{d\tau}\frac{dx^\lambda}{d\tau} = 0 \tag{19-1}$$

となる．これが“自由な”質点の運動方程式であるとみなそう．

特殊相対論のときと同様に 4 元速度を

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} \tag{19-2}$$

によって定義し，さらに 4 元運動量を

$$p^\mu = mcu^\mu \tag{19-3}$$

によって導入する．これを用いて (19–1) を書き直すと次式のようになる．

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = -\frac{1}{mc}\Gamma^\mu{}_{\nu\lambda}p^\nu p^\lambda \tag{19-4}$$

また (18–8) を用いて座標時 t の微分で書くこともできる．

$$\frac{dp^\mu}{dt}=-\frac{\sqrt{-g_{00}}}{m}\Gamma^\mu{}_{\nu\lambda}p^\nu p^\lambda \tag{19-5}$$

この方程式で $\mu=i\,(=1,\,2,\,3)$ の成分はちょうど Newton の運動方程式で

$$F^i=-\frac{\sqrt{-g_{00}}}{m}\Gamma^i{}_{\nu\lambda}p^\nu p^\lambda \tag{19-6}$$

とおいたものになっている．

ここで，以前 §10 で等価原理について考察したことをふり返ってみるのも無駄ではなかろう．図 22 で考えたような宇宙船の中の状況を思い出してみよう．純の体の中心に点 P をとり，伸ばした腕の先を点 Q とする．点 P における局所 Lorentz 系に変換すると点 P では $\Gamma^\mu{}_{\nu\lambda}=0$ である．したがって (19-6) により $F^i=0$ となり，確かに無重力状態になっていることがわかる†．

ところでもし Riemann テンソルがゼロでないとすると，点 P においても $\Gamma^\mu{}_{\nu\lambda}$ の微分はゼロではない．したがって少し離れた点 Q では $\Gamma^\mu{}_{\nu\lambda}\neq 0$ であり，その結果 (19-6) によって点 Q では $F^i\neq 0$ となるであろう．これが本当に図 22 で説明したように P に向かう力になることを示すにはもっと詳しい計算が必要になり，ここでは省略せざるをえない．しかし少なくとも Riemann テンソルがゼロならばこのような力が生じないことも明らかであろう．実際地球の重力がどんな Riemann テンソルを生じるかは，このあと §21 の方法で計算することができる．

Newton 近似

以上のような考え方が妥当なものかどうか見るために，適当な条件のもとで (19-1)，または (19-5) が実際重力場における Newton の方程式に一致するかどうかを調べてみよう．適当な条件とは次のようなものである．

（i） 重力場があまり強くない．

（ii） 重力場は静的である．つまり時間的に不変である．

（iii） 非相対論的である．つまり速度は光速に対して十分におそい．

まず条件（i）は，$g_{\mu\nu}$ が $\eta_{\mu\nu}$ からあまりかけ離れていないことを意味するであろう．したがって

† この意味で局所 Lorentz 系は局所慣性系とも呼ばれる．

$$g_{\mu\nu}(x)=\eta_{\mu\nu}+h_{\mu\nu}(x) \tag{19-7}$$

とおいて

$$|h_{\mu\nu}(x)|\ll 1 \tag{19-8}$$

と考え，$h_{\mu\nu}(x)$ の2次以上の微小量を省略することにする．次に（ii）は $g_{\mu\nu}(x)$ が座標時 x^0 に依らないことを示すと考えよう．すなわち

$$\partial_0 g_{\mu\nu}(x)=0. \tag{19-9}$$

さらに条件（iii）によって

$$u^i\approx v^i/c\approx 0, \qquad u^0\approx 1 \tag{19-10}$$

とおく．ここでは条件（i）を考慮して特殊相対論の場合の (5-13) を用いた．

(19-10) を (19-3) とともに (19-6) に代入すると

$$F^i\approx -\sqrt{-g_{00}}\,mc^2\Gamma^i{}_{00} \tag{19-11}$$

となる．ここで

$$\Gamma^i{}_{00}=\frac{1}{2}g^{i\rho}(2\partial_0 g_{0\rho}-\partial_\rho g_{00}) \tag{19-12}$$

であるが，(19-9) により次のようになる．

$$\Gamma^i{}_{00}\approx -\frac{1}{2}g^{ij}\partial_j g_{00} \tag{19-13}$$

この式の右辺に (19-7) を代入すると

$$\Gamma^i{}_{00}\approx -\frac{1}{2}(\delta^{ij}+h^{ij})\partial_j(-1+h_{00})=-\frac{1}{2}(\partial_i h_{00}+h^{ij}\partial_j h_{00}) \tag{19-14}$$

を得る．この式の最後の項は $h_{\mu\nu}$ の2次の積であるから上の条件（i）により落とすことにする．こうして次式が得られる．

$$\Gamma^i{}_{00}\approx -\frac{1}{2}\partial_i h_{00}. \tag{19-15}$$

また (19-11) に現われる $\sqrt{-g_{00}}$ については

$$\sqrt{-g_{00}}=\sqrt{1-h_{00}}\approx 1-\frac{1}{2}h_{00} \tag{19-16}$$

である．しかしこれを (19-15) にかけるとき，(19-16) の右辺の第2項は h_{00} の2次の微小量を与えるのでこれは落とす．こうして

$$F^i\approx\frac{1}{2}mc^2\partial_i h_{00} \tag{19-17}$$

という結果が得られる．

一方 Newton の力学では力はポテンシャル Φ で表わされる．

$$F^i = -\partial_i m\Phi = -m\partial_i\Phi. \qquad (19\text{–}18)$$

これを (19–17) と比べると

$$\Phi = -\frac{1}{2}c^2 h_{00} \qquad (19\text{–}19)$$

とおくべきことがわかる．つまりこのようにおけば (19–1) から Newton の運動方程式が得られることが示されたのである．(19–7) によれば (19–19) はまた

$$g_{00} = -1 - \frac{2}{c^2}\Phi \qquad (19\text{–}20)$$

と書くこともできる．これは，**重力ポテンシャル Φ の存在によって g_{00} が，その平らなときの値 −1 からずれる**ことを表わしている．

さて上に挙げた条件 (i)–(iii) が満たされていないときにはどうなるであろうか．これこそ Newton の力学では知ることのできなかった新しい力学の領域であり，この領域でこそ，一般相対論の当否が実験によって検証されることになるのである．しかし方程式 (19–1) を物理の問題に適用するためには，どのような重力があればどのような計量が生ずるかを知らなければならない．それは次節で述べる重力場の方程式の問題である．しかしそれにはいる前にいくつかの注意をしておこう．

Newton 力学における重力はただ1個のポテンシャルで記述される．しかし一般相対論の方程式 (19–1) にはもっとたくさんの量がはいってくる．(19–20) から想像されるようにそれぞれの $g_{\mu\nu}$ がすべてポテンシャルの役目をするものと思われる．つまり重力は **10 個のポテンシャル**で記述されることになるといってよい．

(19–1) を基本的な運動方程式とみなすならば重力場における質点の運動は，その質量には全く依存しない．すなわち**2種類の質量の等価性は初めから基本法則の中に組み込まれている**．これが運動法則を純粋に幾何学的な法則に帰着させた一般相対論の特色である．つまり重力的な力に関する限り，Newton の第1法則に相当する (19–1) がすべてであり，Newton の第2法則のように質量が関与する方程式は全く現われてこない．

重力赤方偏位

特殊相対論においては光の進路は $ds^2=\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu=0$ で与えられた．一般相対論ではこれを含む一般的な不変式

$$ds^2=g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu=0 \tag{19-21}$$

が光の軌道を決定すると考えるのが自然であろう．これから直ちに得られる結論の一つは，**重力があれば光速はもはや一定値にはなりえない**ということである．$g_{\mu\nu}$ が場所とともに変化するならば，光はちょうど一様でない媒質の中を伝わる場合のように屈折を受けるであろう．後の §22 で述べる光の湾曲はまさにこのような効果である．

さて (19-1) では質点の世界線に固有時 τ で目盛をつけた．しかし (19-21) に対しては固有時を定義することはできず，別のパラメターをとらなければならない．その詳細については §22 で論ずるが，ここでは (19-20) と (19-21) を組み合わせるだけで“重力による光の赤方偏位”という重要な結果が得られることを示そう．

亮がラジオの電波を発射し，それを別の場所にいる純が受信する．二人とも静止しているが，それぞれの場所では重力のポテンシャルの値が異なるとする．たとえば地球上で亮は地上に立っており，純は高さ h の塔の上にいるものとしてよい（図 45）．また重力場は時間的に変わらないとする．すなわち $g_{\mu\nu}$ の成分はすべて時間に依らないとする．さらによくやるように鉛直方向

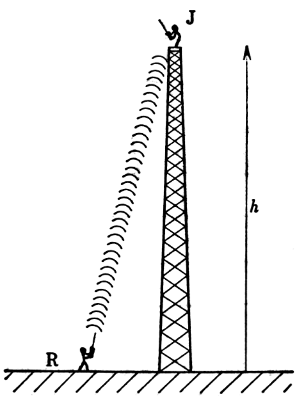


図 45
地上の亮が発射する電波を，塔の上にいる純が受信する．

$x^3=z$ のみ残して他の方向は無視することにしよう.

このような場合，計量の中で g_{03} はゼロにとることができる．このことを説明しよう．不変な線素は[†]

$$ds^2=g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu=g_{00}(dw)^2+2g_{03}dwdz+g_{33}(dz)^2 \tag{19-22}$$

である．ここで

$$w=w'+f(z) \tag{19-23}$$

という関係式によって新しい時間変数 w' に移る．$f(z)$ は z のみの関数である．したがって (19-23) は時間の原点を場所ごとに変えることを意味する．(19-23) によると

$$dw=dw'+\partial_z f(z)\cdot dz \tag{19-24}$$

である．これを (19-22) に代入して項を整理すると

$$\begin{aligned}ds^2=&g_{00}(dw')^2+2[g_{00}(\partial_z f)+g_{03}]dw'dz\\&+[g_{00}(\partial_z f)^2+2g_{03}(\partial_z f)+g_{33}](dz)^2\end{aligned} \tag{19-25}$$

となる．そこで

$$g_{00}(z)\partial_z f(z)+g_{03}(z)=0 \tag{19-26}$$

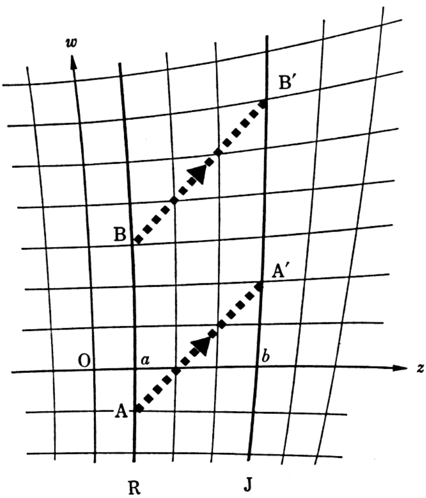


図 46 亮の世界線 R と純の世界線 J
光の世界線は破線で示してある.

† $w=x^0=ct$.

となるように $f(z)$ を選ぶと (19–25) の中で $dw'dz$ の項はなくなる．つまり g'_{03} をゼロにおくことができたのである．以後プライムを省略して

$$ds^2=g_{00}(dw)^2+g_{33}(dz)^2 \tag{19–27}$$

と書くことにする．この座標系では光の進路は次式によって与えられる．

$$g_{00}(dw)^2+g_{33}(dz)^2=0. \tag{19–28}$$

図 46 に亮と純の世界線が書いてある．空間は曲がっているかもしれないので曲線の方眼紙のように描いた．二人とも静止しているのであるから亮の世界線は $z=a$，純のそれは $z=b$ という，ともに定数で与えられる．亮は自分の時計で測って T 秒間だけ電波を発射した．発射の初めに相当する世界点が A，終了に相当する世界点が B であり，またそれを受ける純の，対応する世界点が A′, B′ である．曲線 AA′ は光の進路であり，BB′ も同様である．亮が T 秒間電波を発射したというのは

$$(w)_B-(w)_A=cT \tag{19–29}$$

を意味する．これから

$$(w)_{B'}-(w)_{A'}=cT \tag{19–30}$$

となることを示そう．

$g_{00}<0$ なることを考慮すると (19–28) から

$$dw=\sqrt{-\frac{g_{33}}{g_{00}}}dz \tag{19–31}$$

を得る．これを曲線 AA′ に適用すると

$$(w)_{A'}-(w)_A=\int dw=\int_a^b\sqrt{-\frac{g_{33}(z)}{g_{00}(z)}}dz \tag{19–32}$$

となる．ここで，初めに述べた静的重力場の仮定により，$g_{\mu\nu}$ は x^0 に依らないことに注意する．同様に曲線 BB′ に (19–31) を適用すると

$$(w)_{B'}-(w)_B=\int_a^b\sqrt{-\frac{g_{33}(z)}{g_{00}(z)}}dz \tag{19–33}$$

となり，これは (19–32) と全く等しい．したがって

$$(w)_{A'}-(w)_A=(w)_{B'}-(w)_B. \tag{19–34}$$

これから (19–29) と (19–30) が等しいことが出てくる．

このようにして純も，亮と全く同じ時間間隔 T の間電波を受信することが

わかった．しかしこの T は座標時で測った時間間隔である．(18-8) によれば亮が電波を発射し続けている間に固有時は

$$\tau_a=\sqrt{-g_{00}(a)}\,cT \tag{19-35}$$

経ったのであり，純が受信している間に純の場所での固有時は

$$\tau_b=\sqrt{-g_{00}(b)}\,cT \tag{19-36}$$

だけ経過したことになる．もし二人の場所で g_{00} の値が異なれば τ_a と τ_b とは等しくない．

ところで電波は一定の振動数 ν をもっているとしよう．これは回路の L, C を調整することによって実現できるであろうが，それは重力がない場合のことと考えてよいであろう．つまり**固有時で測って** 1 秒間に ν 回振動するということであって，これはどんな座標系で測っても変わらない性質と考えられる．

こう考えると亮は

$$N=\nu\tau_a/c=\sqrt{-g_{00}(a)}\,\nu T \tag{19-37}$$

回の振動を送り出したことになる．純は当然同じ回数の振動を受けとる．それを固有時で測って τ_b の間に受けとるのであるから純が感ずる振動数は

$$\nu'=\frac{c}{\tau_b}N \tag{19-38}$$

である．これに (19-36), (19-37) を代入すると

$$\nu'=\frac{1}{\sqrt{-g_{00}(b)}}\sqrt{-g_{00}(a)}\,\nu=\sqrt{\frac{-g_{00}(a)}{-g_{00}(b)}}\,\nu \tag{19-39}$$

となり，一般に ν とは等しくならない．純は亮が予告しておいた周波数に受信機を同調させておいたのであるが，それでは電波を受信することができない．ダイヤルを調整し直してやっと亮の信号を受けることができたのである．

さて重力場があまり強くないときには (19-20) によって $-g_{00}=1+2\Phi/c^2$ であった．これを (19-39) に代入し，さらに $2\Phi/c^2$ について一次まで展開すると

$$\frac{\nu'}{\nu}=\sqrt{\frac{1+2\Phi(a)/c^2}{1+2\Phi(b)/c^2}}\approx 1+\frac{\Phi(a)-\Phi(b)}{c^2} \tag{19-40}$$

となる．地球表面の重力場に適用すると

$$\frac{\nu'}{\nu}\approx 1+\frac{g}{c^2}(a-b)=1-\frac{gh}{c^2} \tag{19-41}$$

となる．つまり図 45 のように地上で発信した信号を高い所で受信すると振動数が小さくなる．光でいえば赤い方にずれることになる．これを重力による赤方偏位と呼んでいる．

この予言は 1960 年代になって初めて実験的に確かめられた．Pound と Rebka，および Snider の実験では地上に Co^{57} をおき，$Co^{57}\rightarrow Fe^{57}+\gamma$ という崩壊のときに出る γ 線を地上 22m の塔の上で観測した．この γ 線は $\nu=3.48\times10^{18}$ Hz に相当する．受信の方法は逆反応 $\gamma+Fe^{57}\rightarrow Co^{57}$ が起こるかどうかを見るのである．この場合（19-41）によると

$$\frac{\nu'}{\nu}=1-2.40\times10^{-15} \tag{19-42}$$

であり，赤方偏位の量は非常に小さい．

塔上の Fe^{57} を静止させていたのでは信号に"同調"せず，逆反応は起こらない．そこで Fe^{57} を速度 v で下方に動かすとドップラー効果によって振動数が

$$\nu''\approx\nu'\left(1+\frac{v}{c}\right) \tag{19-43}$$

と高くなり，ちょうど $v/c=2.40\times10^{-15}$ のときに受信できることになる．Pound 達の実験では Mössbauer 効果を使い，1% 以下の精度でこの効果を検出した．

以上，赤方偏位の式（19-40）を一般相対論を使って導いたが，実はこの結果はもっと簡単に得ることができる．つまり電波を量子論的な光子と考え，そのエネルギーを c^2 で割ったものを慣性質量とみなして等価原理を適用すればやはり（19-41）が導かれるのである．したがってこの実験結果だけでは Einstein の幾何学的な描像の決定的な証拠とはみなしえない．

§20　重力場の方程式

Einstein の場の方程式

Newton の理論ではポテンシャル $\Phi(x)$ は Poisson の方程式

$$\nabla^2\Phi(\boldsymbol{x})=4\pi G\rho(\boldsymbol{x}) \tag{20-1}$$

の解である．ここで $\rho(\boldsymbol{x})$ は物質の質量密度，G は Newton の万有引力定数

である ($G=6.67\times10^{-11}\,\mathrm{Nm^2\,kg^{-2}}$). この方程式は時間を含まない静的な方程式であり，相対論的に不変ではない．一般相対論では (20-1) に代わる不変，または共変な型の方程式が存在するはずであるが，その方程式は特別の場合として (20-1) を含むものでなければならないであろう．一般的な重力場の方程式の具えるべき条件として Einstein は次の三つを考えた．

(i)　方程式は一般座標変換に対してテンソルの型で書かれること．

(ii)　$g_{\mu\nu}(x)$ の最高2階の微分を含み，それについて線型であること．

(iii)　方程式の"右辺"は物質のエネルギー・運動量テンソルであること．

条件 (i) は §18 で述べた一般相対性原理そのものである．また (ii) は (20-1) の型から推測される事柄である．次に条件 (iii) について説明しておこう．

(20-1) の右辺は質量密度である．しかし特殊相対論で明らかになったように質量とエネルギーは等価である．したがって一般的な重力場の源は"エネルギー密度"となるべきであろう†．さらに特殊相対論では §8 で学んだように，エネルギー密度は，運動量密度，応力テンソルとともに2階の対称テンソルをなす．このように見てくると重力場の源は物質のエネルギー・運動量テンソル $T^{\mu\nu}$ を曲がった空間に一般化したものとすべきであろうというのが Einstein の考えである．

このように一般化された $T^{\mu\nu}$ は一般座標変換に対して2階のテンソルとして変換するであろう．また μ, ν について対称であるという性質はそのまま受けつがれると考えられる．ところで平らな Minkowski 時空では $T^{\mu\nu}$ は"無発散条件" (8-13)

$$\partial_\nu T^{\nu\mu}=0 \tag{20-2}$$

を満足する．これはエネルギー，運動量の保存則の別の表現であった．しかし (20-2) の左辺は，(15-29) に関連して説明したように一般座標変換に対して反変ベクトルとしては変換しない．すなわち (20-2) は任意の座標系で成り立つ式とはいえない．一般座標変換に対して共変な型を得るには (20-2) の微分

---

† これは必ずしも一意的な結論ではない．"右辺"をスカラーの質量密度として理論をつくることも可能である．この場合にはただ一つのスカラー重力ポテンシャルが出てくる．しかしこれは実験と合わない．特に光の湾曲を与えない．ただ Einstein の理論にこのようなスカラー場の部分をつけ加えることはできる (Brans と Dicke のスカラー・テンソル理論)．

∂_ν を共変微分 ∇_ν でおき換えればよい．したがって (20-2) の代りに

$$\nabla_\nu T^{\nu\mu}=0 \tag{20-3}$$

が満たされると考える．

さてこのような性質をもつ2階の対称テンソルが“右辺”に現われるとすると，条件（i）に従って“左辺”も2階の対称テンソルでなければならない．それを $\mathcal{G}^{\mu\nu}$ とすると，求める重力場の方程式は

$$\mathcal{G}^{\mu\nu}=-\kappa^2 T^{\mu\nu} \tag{20-4}$$

という型でなければならない．ここに登場する定数を便宜上 κ^2 と書いた．右辺の $T^{\mu\nu}$ は (20-3) を満たすのであるから，左辺もまたそうなっているはずである．すなわち $\mathcal{G}^{\mu\nu}$ は

$$\nabla_\nu \mathcal{G}^{\nu\mu}=0 \tag{20-5}$$

を満たすものでなければならない．ここで (17-30) で導入した Einstein テンソル

$$G^{\mu\nu}=R^{\mu\nu}-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}R \tag{20-6}$$

が登場する．これは Bianchi 恒等式の結果として (17-31)

$$\nabla_\nu G^{\nu\mu}=0 \tag{20-7}$$

を満たす．さらに $R^{\mu\nu}$, R はともに Riemann テンソルから (16-12), (16-13) のようにつくられるものであり，したがって (17-6) からわかるように，接続係数の1階微分までを含む．すなわち (14-8a) によれば $g_{\mu\nu}$ の2階までの微分を含む．またこれらの式をよく見ると $g_{\mu\nu}$ の2階微分については線型であることもわかる．結局 $G^{\mu\nu}$ は，先に述べた条件（ii）を満たしているのである．

このようなわけで (20-4) の $\mathcal{G}^{\mu\nu}$ としては (20-6) を採用すべきことが結論され，重力場の方程式は

$$G^{\mu\nu}=-\kappa^2 T^{\mu\nu} \tag{20-8}$$

となる．これが“Einstein の方程式”である．

実は (20-8) の左辺はもう少し一般化することができ

$$G^{\mu\nu}+\lambda g^{\mu\nu}=-\kappa^2 T^{\mu\nu} \tag{20-9}$$

とすることも可能である．$g^{\mu\nu}$ は (15-21) によってそれ自身 $\nabla_\nu g^{\nu\mu}=0$ を満た

すので，これに任意の定数 λ をかけて加えても前記の諸条件に反しないのである．この項は“宇宙項”と呼ばれ，Einstein が一度は導入したが結局棄て去ったものである．ここでは宇宙項は存在しないものとし，最も簡単な形（20-8）を採用することにする．

このようにして重力場の基本方程式は Riemann 幾何学の枠組に従ってその型がほとんど一意的に決定された．これは一般相対論の中でも最も美事な部分ということができる．この本のこれまでの長い議論の道筋を数行で要約してみると次のようになるであろう．

一般相対性とか等価原理とか，そのままではあまり厳密に定義されていない概念を Einstein は Riemann 幾何学によって定式化した．一度採用すれば，あとはこの数学の厳密な“おきて”に従わなければならない．(20-8) を導くに当たっては共変微分，Bianchi 恒等式といったおきてが特に重要な役割を果たしたのである．

このような事情を Maxwell 方程式の成立の過程と比べてみると興味深い．Coulomb の法則，Ampère の法則，Faraday の法則といった電磁気学の諸法則は数多くの実験事実から幾多の試行錯誤を経て抽出されたものである．Maxwell はこれらの諸法則を統一した．特殊相対論が完成した後には方程式はさらに簡潔な型をとる．この本では説明を省いたのであるが Maxwell の方程式の組は

$$\partial_\mu F^{\mu\nu}=J^\nu, \qquad \partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu}=0 \tag{20-10}$$

という型に書かれる．ここで $F^{\mu\nu}$ は2階の反対称テンソルで電場，磁場を表わし，

$$\tilde{F}^{\mu\nu}\equiv\frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma} \tag{20-11}$$

は双対テンソルと呼ばれる†．また J^ν は電荷，電流の4元ベクトルである．(20-10)，(20-11) は完全に Lorentz テンソルの型で書かれているので，どんな Lorentz 変換をしても同じ型を保つ．

Einstein の方程式（20-8）は，電磁気学の方程式の最終的な型（20-10），

† $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ は完全反対称テンソルで μ, ν, ρ, σ が 0 1 2 3 から偶置換で得られる場合は +1，奇置換の場合は −1 である．

(20-11) に対応するものである．このような最終的な型が，あまり多いとはいえない実験事実から出発し，純粋に理論的な考えを先行させて得られたというところに一般相対論の他に見られない特色がある．

なお Riemann テンソルの型からすぐわかるように (20-8) は $g_{\mu\nu}$ **について非線型である**．この点で重力場の方程式は Maxwell 方程式と根本的に異なっており，その解法も大変複雑になる．

さて本題に戻って (20-8) が実際 (20-1) を含むものかどうか確かめておかなくてはならない．その準備として若干の変型を試みておく．まず (20-8) に $g_{\mu\nu}$ をかける．右辺は

$$\kappa^2 g_{\mu\nu} T^{\mu\nu} \equiv \kappa^2 T \tag{20-12}$$

となる．このような T は $T^{\mu\nu}$ の "跡" (対角和) と呼ばれる．実際 Minkowski 空間では

$$T = \eta_{\mu\nu} T^{\mu\nu} = -T^{00} + T^{11} + T^{22} + T^{33} \tag{20-13}$$

となって $T^{\mu\nu}$ の対角成分のみで表わされる．一般の計量ではそうはならないが，便宜上同じ名で呼ばれる．

(20-8) の左辺の跡に関しては (20-6) から

$$g_{\mu\nu} G^{\mu\nu} = R - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} R = R - \frac{1}{2} \times 4R = -R \tag{20-14}$$

となる．これを (20-12) と等置すると

$$-R = -\kappa^2 T \tag{20-15}$$

を得る．これを (20-6) とともに (20-8) に代入し，項を移すと

$$R^{\mu\nu} = -\kappa^2 \left(T^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} T \right) \tag{20-16}$$

という型になる．

弱い場の近似

(20-1) は物質分布が与えられるとそれに応じて重力場 Φ がつくられることを示している．ところが (20-8) はもう少し複雑なことを表わしている．

初め物質のエネルギー・運動量テンソル $T^{\mu\nu}$ は平らな Minkowski 時空で与えられているものと考えてみる．これを源とする方程式 (20-8) の解として

$g_{\mu\nu}(x)$ は $\eta_{\mu\nu}$ からずれるであろう．これは時空が曲がることを意味する．そうなると右辺の $T^{\mu\nu}$ も曲がった時空における2階のテンソルとして定義されていなければならなくなる．つまり物質は自らつくり出した重力場のはねかえりを受けて自らを修正する必要に迫られる．さらに $g_{\mu\nu}$ はこの修正された $T^{\mu\nu}$ を源とする方程式の解でなければならない．

上の説明では，$T^{\mu\nu}$ は初め平らな時空におけるものから出発し，後に修正されるように述べたが，これは便宜的な表現にすぎない．本当は $T^{\mu\nu}$ も $g_{\mu\nu}$ も，ともに (20-3) と (20-8) を同時に満たすようにうまく決まっているはずなのである．つまり**時空の構造と物質の存在とは互いに無関係ではなく，重力場の方程式を通して互いに他を規制し合っている**のである．従来の考え方によれば時空はあらゆる物質の“入れ物”として物質とは独立に与えられているものであったが，Einstein はこの伝統的な常識にも変革を加えようとするのである．このような見方は一般相対論を宇宙論として活用する場合に一層はっきりした型で現われてくる．

しかし重力場が非常に弱い場合にはこのような複雑さはほとんど無視できるようになる．すなわち重力場からのはねかえりも小さいので $T^{\mu\nu}$ としては特殊相対論におけるものをそのまま使うことが許されるであろう．以下ではこのような状況を考えることにする．また物質分布は静止していて，すべてが静的であるとしよう．物質分布としては §8 で調べた質点の連続分布を考える．静止状態では (8-8) に (19-10) を用いて

$$\begin{cases} T^{00}=c^2\rho(\boldsymbol{x}) \\ \text{他の}\ \ T^{\mu\nu}=0 \end{cases} \tag{20-17}$$

となる．

次に (19-7) と同じく

$$g_{\mu\nu}(x)=\eta_{\mu\nu}+h_{\mu\nu}(x) \tag{20-18}$$

と書いて (20-16) の左辺に代入し，$h_{\mu\nu}(x)$ の1次の微小量のみを残す．これは非線型の方程式 (20-8) または (20-16) の“線型化”に他ならない．(17-6) を (16-12) に代入すると

$$R_{\mu\nu}=-\partial_\rho \Gamma^\rho{}_{\mu\nu}+\partial_\nu \Gamma^\rho{}_{\mu\rho}-\Gamma^\rho{}_{\mu\nu}\Gamma^\sigma{}_{\rho\sigma}+\Gamma^\tau{}_{\mu\rho}\Gamma^\rho{}_{\tau\nu} \tag{20-19}$$

となる．ここで $\Gamma^\rho{}_{\mu\nu}$ は (14-8 a) により

$$\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu}=\frac{1}{2}g^{\rho\sigma}(\partial_{\mu}g_{\sigma\nu}+\partial_{\nu}g_{\sigma\mu}-\partial_{\sigma}g_{\mu\nu}) \tag{20-20}$$

である．これに (20-18) を代入するのであるが $\partial_{\mu}g_{\sigma\nu}=\partial_{\mu}h_{\sigma\nu}$ であるから (20-20) のかっこの中はすでに $h_{\mu\nu}$ の 1 次の微小量である．したがってかっこの前の $g^{\rho\sigma}$ はゼロ次の $\eta^{\rho\sigma}$ とおくべきである．このようにして線型近似では

$$\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu}\approx\frac{1}{2}(\partial_{\mu}h^{\rho}{}_{\nu}+\partial_{\nu}h^{\rho}{}_{\mu}-\partial^{\rho}h_{\mu\nu}) \tag{20-21}$$

となる．ここでたとえば $h^{\rho}{}_{\nu}$ は

$$h^{\rho}{}_{\nu}=\eta^{\rho\sigma}h_{\sigma\nu} \tag{20-22}$$

のように，添字を $\eta^{\rho\sigma}$ で上げたものである．同様に

$$\partial^{\rho}h_{\mu\nu}=\eta^{\rho\sigma}\partial_{\sigma}h_{\mu\nu}=\eta^{\rho\sigma}\partial h_{\mu\nu}/\partial x^{\sigma} \tag{20-23}$$

である．

このようにして $\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu}$ は $h_{\mu\nu}$ の 1 次の微小量であるから (20-19) の右辺の第 3, 4 項は落としてよい．第 1, 2 項を計算すると

$$R_{\mu\nu}\approx\frac{1}{2}(\Box h_{\mu\nu}+\partial_{\mu}\partial_{\nu}h-\partial_{\rho}\partial_{\mu}h^{\rho}{}_{\nu}-\partial_{\rho}\partial_{\nu}h^{\rho}{}_{\mu}) \tag{20-24}$$

となる．ここで $\Box$ は特殊相対論の D'Alembertian である．

$$\Box=\eta^{\mu\nu}\partial_{\mu}\partial_{\nu}=\boldsymbol{\nabla}^2-(\partial_0)^2. \tag{20-25}$$

また h は $h_{\mu\nu}$ の跡である．

$$h=\eta^{\mu\nu}h_{\mu\nu}. \tag{20-26}$$

さらにすべては静的であるので $\partial_0 h_{\mu\nu}=0$ とおくと (20-24) の $\mu=\nu=0$ の成分は

$$R_{00}\approx\frac{1}{2}\boldsymbol{\nabla}^2 h_{00} \tag{20-27}$$

となる．また明らかに $R^{00}\approx R_{00}$ であるから，(20-17) と合わせて，(20-16) の $\mu=\nu=0$ の成分は結局

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{\nabla}^2 h_{00}\approx-\frac{1}{2}\kappa^2c^2\rho(\boldsymbol{x}) \tag{20-28}$$

となる．これはまさに h_{00} に対する線型の Poisson 方程式である．(19-19) によると Newton の意味の重力ポテンシャルと h_{00} とは $\boldsymbol{\Phi}=-(c^2/2)h_{00}$ という関係にあるので (20-28) は

$$\nabla^2\Phi=\frac{1}{2}\kappa^2c^4\rho \tag{20-29}$$

と書かれる．これで望み通り（20-1）と同じ型になった．あとは

$$\kappa^2=8\pi G/c^4 \tag{20-30}$$

とおけばよい．こうして Einstein の方程式（20-8）に現われた定数 κ は Newton の万有引力定数 G で表わされることがわかった．

（20-16）の $\mu=\nu=0$ 以外の成分が何を与えるかを見るのは読者の練習にまかせよう．

重　力　波

さて（20-24）はさらに重要なことを表わしている．この式の右辺を見ると各項ともに $h_{\mu\nu}$ の2階の微分である．したがって（20-24）を（20-16）に代入すると，それは $h_{\mu\nu}$ に対する線型2階の微分方程式となり，その源は物質のエネルギー・運動量テンソルからなる．もちろん（20-28）もそういう種類の方程式であったが，静的でない場合にも $h_{\mu\nu}$ **に対する波動方程式**が得られるのである．

（20-24）の右辺には $\Box h_{\mu\nu}$ という項があるが，それ以外に複雑な項が付け加わっている．これらの項をどのように扱うかはここでは触れないが，結果としては捨て去ってよいことがわかる．つまり（20-24）の中で最も重要な役割を果たすのは $\Box h_{\mu\nu}$ の項である．その意味で（20-16）を

$$\Box h_{\mu\nu}\sim-2\kappa^2T_{\mu\nu} \tag{20-31}$$

と書いてもよいであろう．

これは電磁場の方程式とよく似ている．この本の初めの（1-1）では右辺がゼロであったが，それは真空中の電磁場を考えたからであった．物質があれば右辺には電荷，電流密度が出てくる．それは（振動する）電荷，電流を源として電磁波が発生し，真空中を c の速さで伝わることを表わしているのであった．それと同様に（20-31）は，**（振動する）物質のエネルギー，運動量を源として重力場が発生する**ことを示す．これが“重力波”である．これは真空中を光速 c で伝播し，物質があればそれに振動する重力を及ぼす．

電磁波の発生，吸収の強さを決めるのは電荷 e であった．これに対して重力

波の発生，吸収等の強さは $\kappa^2=8\pi G/c^4$ で決定される．これは e に比べて非常に小さいので，重力波を直接実験的に検出することは容易でなく，将来の測定方法の精密化が待たれている†．

§21 Schwarzschild の解

線素の型

すでに述べたように Einstein の重力場の方程式 (20-8) は $g_{\mu\nu}$ について非線型である．したがってその解を求めることは一般に非常に難しい．現在までにいくつかの条件に応じた厳密解が求められているが，ここではそれらすべての出発点となっている Schwarzschild の解を求め，その結果を議論する．

Schwarzschild の解として知られているものの中には外部解と内部解とがあるが，ここで説明するのは外部解である．これは物質が存在しない空間領域における方程式 (20-16)

$$R_{\mu\nu}=0 \tag{21-1}$$

の解である††．もちろん重力場は物質によって生み出されるものであるが，物質はある場所に局在していることが多い．地球でも太陽でもそうである．これらの物質分布の内部では (21-1) の右辺はゼロでなく，物質のエネルギー・運動量密度によって与えられる項があるが，物体の外側では方程式 (21-1) が成り立つ．外部の解のみを求めて物質のつくる重力場が計算できるかという疑問が生ずるかもしれない．しかし内部に物質がどれだけあるかということは，外部で得た解の境界条件としてとり入れることができるのである．

さて Schwarzschild が考えたのは空間が**静的で球対称**な場合である．原点に質点が静止している場合はこうなっている．質点でなくても球対称で静止した質量分布でも同じことである．物質分布の外側で (21-1) を考察する．このとき $g_{\mu\nu}$ は時間に依らず，また空間的な方向にも依らない．このような場合，

---

† 電荷 e と重力定数 G とは次元が異なるので直接大きさを比べることはできない．しかしたとえば陽子の質量 m_p, Planck 定数を 2π で割った $\hbar$, それに c を用いて無次元の量をつくることができる．これは実際非常に小さく $Gm_p{}^2/\hbar c=5.90\times10^{-39}$ となる．一方電荷の方は，陽子の電荷をとると $e^2/\hbar c=1/137$ であり，二つの量の間には 36 桁の違いがある．

†† これから直ちに $R=0$ が出る．しかし Riemann テンソルの成分の中には実際ゼロでないものがあり，空間はやはり曲がっている．

3次元空間を表わす座標としては極座標

$$\theta=x^1, \qquad \varphi=x^2, \qquad r=x^3 \tag{21-2}$$

を使うのが便利である．直交座標との関係は（16-1）と同じく

$$X=r\sin\theta\cos\varphi, \qquad Y=r\sin\theta\sin\varphi, \qquad Z=r\cos\theta \tag{21-3}$$

である．

線素の式を分解して次のように書く．

$$ds^2=g_{00}(dx^0)^2+2g_{0i}dx^0dx^i+(d\tilde{s})^2 \tag{21-4}$$

ここで $(d\tilde{s})^2$ は3次元的な線素である．時空が静的であるという仮定から $g_{\mu\nu}$ は x^0 を含まないと考えてよい．次に（21-4）の右辺の第2項を考えよう．

$$g_{0i}dx^0dx^i=g_{01}dx^0d\theta+g_{02}dx^0d\varphi+g_{03}dx^0dr \tag{21-5}$$

の右辺の中で第1項と第2項は落とすべきである．そうでないと ds^2 が方向に依って変わることになってしまう．また（21-5）の右辺の最後の項は（19-22)～(19-27）と同じ議論によって消してしまうことができる（このようにしないと ds^2 がやはり時間に依ってしまうことになる）．こうして（21-4）の右辺の第2項はゼロであることがわかった．

次に（21-4）の右辺の最後の項は

$$(d\tilde{s})^2=g_{33}(r)(dr)^2+r^2d\Omega^2 \tag{21-6}$$

という型に書けることを示そう．ここで $d\Omega^2$ は略記号で次を意味する．

$$d\Omega^2\equiv(d\theta)^2+\sin^2\theta(d\varphi)^2. \tag{21-7}$$

球対称な3次元線素を書く一つの方法は直交座標を用いて

$$(d\tilde{s})^2=g_1(r)[(dX)^2+(dY)^2+(dZ)^2] \tag{21-8}$$

とすることである．これは確かにどの方向も特別に扱っていない．この式の角かっこの中は

$$(dr)^2+r^2d\Omega^2 \tag{21-9}$$

と書くことができる．これを確かめるには(21-3)を微分して($dX=dr\sin\theta\cos\varphi+r\cos\theta d\theta\cos\varphi-r\sin\theta\sin\varphi d\varphi$ など）直接計算してもよいし，また§16 の図 36 に少し工夫を加えてもよいであろう．したがって

$$(d\tilde{s})^2=g_1(r)[(dr)^2+r^2d\Omega^2] \tag{21-10}$$

となる．

ところで（21-10）の右辺の第1項，すなわち $g_1(r)(dr)^2$ 自身も明らかに

球対称である†．このことは (21–10) の右辺の 2 項にはそれぞれ別々に r の関数をかけても構わないことを意味する．このようなわけで球対称な 3 次元的な線素の最も一般的な型は

$$(d\tilde{s})^2=g_1(r)(dr)^2+g_2(r)r^2d\Omega^2 \qquad (21\text{–}11)$$

と書いてよいことがわかる．

計算を簡単にするにはここでもう一つの変数変換を行なっておくとよい．つまり

$$\sqrt{g_2(r)}r=r' \qquad (21\text{–}12)$$

とおいて新しい動径座標 r' に移るのである．このように任意の座標変換を行なってもよいというのが一般相対論の特徴である．この r' で表わせば (21–11) の右辺の第 2 項は $r'^2d\Omega^2$ となる．この変数変換に応じて (21–11) の右辺の第 1 項も書き換えなくてはならない．しかしその結果はやはり (r'の関数) $\times(dr')^2$ という型になることは明らかである．この新しい関数を $g_{33}(r')$ と書こう．最後に r' のことを r と書くことにすると前に予告した (21–6) が得られることになる．こうして結局

$$ds^2=g_{00}(r)(dx^0)^2+g_{33}(r)(dr)^2+r^2d\Omega^2 \qquad (21\text{–}13)$$

を得る．これが静的，球対称な重力場の最も一般的な線素の型である．

方程式の解法

さて (21–13) の型で表わされる計量を (21–1) に代入するのであるが

$$\begin{cases} g_{00}=-e^{\nu(r)} \\ g_{33}=e^{\lambda(r)} \end{cases} \qquad (21\text{–}14)$$

とおいて未知関数を $\nu(r)$, $\lambda(r)$ とする．もちろん (21–7) から

$$g_{11}=r^2, \qquad g_{22}=r^2\sin^2\theta \qquad (21\text{–}15)$$

で他の $g_{\mu\nu}$ は全部ゼロである．$g_{\mu\nu}$ は対角的であるから逆行列はそれぞれの逆数にすぎず

$$\begin{cases} g^{00}=-e^{-\nu}, & g^{33}=e^{-\lambda} \\ g^{11}=r^{-2}, & g^{22}=(r\sin\theta)^{-2} \end{cases} \qquad (21\text{–}16)$$

---

† これを直交座標で書くと $g_1(r)(dr)^2=\frac{1}{r^2}g_1(r)(XdX+YdY+ZdZ)^2$ である．

である．

これらを $\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}$ の式 (20-20) に代入し，さらに Ricci テンソルを (20-19) によって計算する†．少し複雑であるが一度練習問題としてやってみてほしい．結果は ($\nu'=d\nu/dr$, $\nu''=d^2\nu/dr^2$ と書いて)

$$e^{\lambda-\nu}R_{00}=\frac{1}{2}\nu''+\frac{1}{4}\nu'^2-\frac{1}{4}\nu'\lambda'+\frac{\nu'}{r} \tag{21-17 a}$$

$$R_{33}=-\frac{1}{2}\nu''-\frac{1}{4}\nu'^2+\frac{1}{4}\nu'\lambda'+\frac{\lambda'}{r} \tag{21-17 b}$$

$$R_{11}=\frac{1}{\sin^2\theta}R_{22}=1+e^{-\lambda}\left(-1-\frac{1}{2}r\nu'+\frac{1}{2}r\lambda'\right) \tag{21-17 c}$$

となる．他の $R_{\mu\nu}$ は自動的にゼロである．方程式 (21-1) は (21-17 a)～(21-17 c) がすべてゼロであることを意味する．これらは $\nu(r)$ と $\lambda(r)$ **とに対する非線型の連立微分方程式**である．その解は次のようにして求められる．

まず (21-17 a)＝0 と (21-17 b)＝0 を加えると

$$\frac{\lambda'+\nu'}{r}=0 \tag{21-18}$$

が得られる．原点は質点のある場所であるから除外してよい．したがって (21-18) は

$$\frac{d}{dr}(\lambda+\nu)=0 \tag{21-19}$$

となる．これは直ちに積分できて

$$\lambda+\nu=b \tag{21-20}$$

を得る．ここで b は積分定数である．

次に (21-17 c)＝0 を変形すると

$$\left[1-\frac{1}{2}r(\lambda'-\nu')\right]e^{-\lambda}=1 \tag{21-21}$$

となる．ここで (21-19) を用いると $(\lambda'-\nu')/2=\lambda'$ である．したがって (21-

---

† ついでに $R_{\mu\nu,\rho\sigma}$ も計算しておくとよい．あとで得られる解 (21-30) を使うと

$$R_{10,10}=-\frac{a}{2r}\left(1-\frac{a}{r}\right),\qquad R_{20,20}=R_{10,10}\sin^2\theta$$

のようなものが得られる．§19 (128 ページ) で図 22 の状況を説明したが，Pにおける局所慣性系で，QからPに向かう力を与えるのは上に書いた Riemann テンソルの成分である．

21）は

$$\frac{d}{dr}(re^{-\lambda})=1 \tag{21-22}$$

という型になる．これもすぐに積分できる．

$$re^{-\lambda}=r-a. \tag{21-23}$$

ここで a はもう一つの積分定数である．(21-23) を書き直すと

$$e^{\lambda}=\frac{1}{1-a/r} \tag{21-24}$$

を得る．さらに (21-20) を使うと次式も得られる．

$$e^{\nu}=e^{b}e^{-\lambda}=e^{b}\left(1-\frac{a}{r}\right) \tag{21-25}$$

実はこれで方程式は完全に解けたのである．まだ (21-17 a)=0 と (21-17 b)=0 との差の方は計算してなかった．しかし (21-24) と (21-25) から

$$\nu'=-\lambda'=\frac{a/r^2}{1-a/r}, \qquad \nu''=-\frac{a(2-a/r)}{r^3(1-a/r)^2} \tag{21-26}$$

が得られるが，これによるとすでに

$$\frac{1}{2}\nu''+\frac{1}{4}\nu'^2-\frac{1}{4}\nu'\lambda'+\frac{\nu'}{r}=0 \tag{21-27}$$

となっており，もはや新しい方程式は出てこないことがわかるのである．

このようにして Einstein の方程式 (21-1) の解が求められ，線素は ((21-24), (21-25) を (21-14) に代入して)

$$ds^2=-e^{b}\left(1-\frac{a}{r}\right)(dx^0)^2+\frac{1}{1-a/r}(dr)^2+r^2d\Omega^2 \tag{21-28}$$

となることがわかった．さらに第 1 項の型を簡単にするために

$$e^{b/2}x^0=x'^0 \tag{21-29}$$

とおいて新しい時間座標 x'^0 を導入する．最後に x'^0 を x^0 と書き直して

$$ds^2=-\left(1-\frac{a}{r}\right)(dx^0)^2+\frac{1}{1-a/r}(dr)^2+r^2d\Omega^2 \tag{21-30}$$

となる．これが Schwarzschild の外部解の最終的な型であり，このような線素によって記述される時空を "Schwarzschild 時空" と呼ぶ．

Schwarzschild 半径

まだ定数 a の値が決まっていないがそれは次のようにして決められる．(21-30) は

$$g_{00}(r)=-1+\frac{a}{r} \tag{21-31}$$

を意味している．これによれば $r\gg a$ では g_{00} は -1 に近づく．すなわち重力場は弱くなると考えられる．そこで (21-31) を (19-20) と比べてみると，(21-31) は十分遠方では重力ポテンシャル

$$\Phi=-\frac{c^2a}{2r} \tag{21-32}$$

に相当する効果を表わしていることがわかる．

これはちょうど原点に質点が存在している場合の Newton ポテンシャルと同じ型である．質点の質量を m とすると

$$\Phi=-\frac{Gm}{r} \tag{21-33}$$

となるのであるから，これを (21-32) と比べて

$$a=\frac{2Gm}{c^2} \tag{21-34}$$

る得る．この a のことを "Schwarzschild 半径"，または質量 m に伴う "重力半径" と呼ぶ．

このようにして Newton ポテンシャル (21-33) は，Einstein 方程式の厳密解の遠方における漸近的な振舞いに他ならないことが確かめられた．しかし r が小さくなると Newton の重力とは異なったものになってくる．特に $r\approx a$ になると g_{00} も g_{33} も平らなときの値 -1，$+1$ から大幅にずれる．すなわち重力場は非常に強くなる．最も著しいことが起こりそうなのは $r=a$ である．この距離を境にして g_{00} も g_{33} も符号を変える．後に "ブラックホール" と呼ばれるようになるいろいろ奇妙な現象はこのことから生ずる．これについては次の節で述べよう．

その前に Schwarzschild 半径の値について考えておく．通常の物体ではこの値は非常に小さい．たとえば地球について見ると $m\simeq6\times10^{24}$ kg であるから $G=6.67\times10^{-11}$ $\mathrm{Nm^2kg^{-2}}$，$c=3\times10^8$ $\mathrm{m\cdot sec^{-1}}$ とともに (21-34) に代入する

と $a \simeq 0.9\,\mathrm{cm}$ となる．太陽では $m \simeq 2.0 \times 10^{30}\,\mathrm{kg}$ で $a \simeq 2.9 \times 10^3\,\mathrm{m}$ である．このような場合 Schwarzschild 半径には現実的な意味はない．なぜならば $r=a$ は質量分布の中にはいってしまい，そこでは外部解は使えないからである．しかしもし $r=a$ が質量分布の外側にあるようなことがあれば Schwarzschild 半径は現実的なものとなる．そのようなことが実現しうるであろうか．

一様な質量密度 ρ で，半径 R の球があるとしよう．その質量 m は

$$m = \frac{4\pi}{3}\rho R^3 \tag{21-35}$$

である．これを (21-34) に代入すると

$$a = \frac{8\pi}{3}\frac{G\rho R^3}{c^2} \tag{21-36}$$

となる．この a が R より大きいとしてみる．すなわち

$$\frac{8\pi}{3}\frac{G\rho R^2}{c^2} > 1. \tag{21-37}$$

ここで (21-35) を使って R を m と ρ で表わしてみると (21-37) は

$$m^2\rho > \frac{3}{32\pi}\left(\frac{c^2}{G}\right)^3 = 7.33 \times 10^{82} \tag{21-38}$$

という条件になる．最後の数値は CGS 単位系で表わしてある．もし m として太陽質量を仮定すると

$$\rho > 1.83 \times 10^{16}\,\mathrm{g \cdot cm^{-3}} \tag{21-39}$$

という極端に大きな値となる．実際の太陽では $\rho \simeq 1.4\,\mathrm{g \cdot cm^{-3}}$ であり，このために $a \ll R$ となったのである．

しかし中性子星の内部では ρ は原子核の中の密度

$$\rho \simeq 2.4 \times 10^{14}\,\mathrm{g \cdot cm^{-3}} \tag{21-40}$$

くらいであると考えられており，これは (21-39) の下限にかなり近い値である．中性子星が互いの重力のためにさらに収縮し (重力崩壊)，密度が (21-39) の下限をこえて増大するかもしれない．このような場合にはブラックホールが実現しているものと考えられている．

§22　光の湾曲

測地線の方程式

Schwarzschild 時空は曲がった空間である．したがってその中の測地線も曲がっている．ところで（19–1）で与えた質点の運動方程式は質点の質量には全く依存しない．このことが慣性質量と重力質量の等価性を保証するものであった．この考えによれば質量ゼロの光子も同じ運動方程式に従うものとみなしてよいであろう．ただ，(19–21) に関連して述べたように，光子の進路は

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = 0 \tag{22-1}$$

という条件も満たしていなければならない．したがって道筋のパラメターとして固有時を使うことはできない．そこでパラメター σ は特に指定しないままで測地線の方程式（16–32）を使う．

$$\frac{d^2x^\mu}{d\sigma^2} + \Gamma^\mu{}_{\nu\lambda} \frac{dx^\nu}{d\sigma} \frac{dx^\lambda}{d\sigma} = 0. \tag{22-2}$$

また（22–1）を形式的に $d\sigma$ の自乗で割ると

$$g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\sigma} \frac{dx^\nu}{d\sigma} = 0 \tag{22-3}$$

となる．光の進路は（22–2）と（22–3）によって決定される．

さて（21–30）の計量を使い，(20–20) によって接続係数を計算すると

$$\begin{cases} \Gamma^0{}_{03} = -\Gamma^3{}_{33} = \dfrac{a}{2r^2} \dfrac{1}{1-a/r} \\ \Gamma^1{}_{22} = -\sin\theta\cos\theta, \qquad \Gamma^2{}_{12} = \cot\theta \\ \Gamma^1{}_{31} = \Gamma^2{}_{23} = 1/r \\ \Gamma^3{}_{00} = \dfrac{a}{2r^2}\left(1-\dfrac{a}{r}\right) \\ \Gamma^3{}_{11} = \dfrac{1}{\sin^2\theta} \Gamma^3{}_{22} = -r\left(1-\dfrac{a}{r}\right) \end{cases} \tag{22-4}$$

となる．他の $\Gamma^\mu{}_{\nu\lambda}$ はゼロである．これを（22–2）に代入すると

$$\mu=0: \quad \frac{d^2w}{d\sigma^2} + \frac{a}{r^2} \frac{1}{1-a/r} \frac{dw}{d\sigma} \frac{dr}{d\sigma} = 0 \tag{22-5 a}$$

$$\mu=1: \quad \frac{d^2\theta}{d\sigma^2}-\sin\theta\cos\theta\left(\frac{d\varphi}{d\sigma}\right)^2+2\frac{1}{r}\frac{d\theta}{d\sigma}\frac{dr}{d\sigma}=0 \tag{22-5 b}$$

$$\mu=2: \quad \frac{d^2\varphi}{d\sigma^2}+2\cot\theta\frac{d\theta}{d\sigma}\frac{d\varphi}{d\sigma}+2\frac{1}{r}\frac{d\varphi}{d\sigma}\frac{dr}{d\sigma}=0 \tag{22-5 c}$$

$$\mu=3: \quad \frac{d^2r}{d\sigma^2}+\frac{a}{2r^2}\left(1-\frac{a}{r}\right)\left(\frac{dw}{d\sigma}\right)^2-r\left(1-\frac{a}{r}\right)\left(\frac{d\theta}{d\sigma}\right)^2$$
$$-r\left(1-\frac{a}{r}\right)\sin^2\theta\left(\frac{d\varphi}{d\sigma}\right)^2-\frac{a}{2r^2}\frac{1}{1-a/r}\left(\frac{dr}{d\sigma}\right)^2=0 \tag{22-5 d}$$

を得る．ここで $x^0=ct=w$ と書いた．

まず4元速度に“似た”量

$$u^\mu=\frac{dx^\mu}{d\sigma} \tag{22-6}$$

を導入すると（22-5 a）は

$$\frac{du^0}{d\sigma}+\frac{a}{r^2}\frac{1}{1-a/r}u^0\frac{dr}{d\sigma}=0 \tag{22-7}$$

という形になる．この方程式は σ の関数 $U(\sigma)$ に対して

$$\frac{dU}{d\sigma}+f(r)\frac{dr}{d\sigma}U=0 \tag{22-8}$$

の形である．この形の方程式は次にもう一度出てくるので解き方を説明しておこう．いま

$$f(r)=\frac{dF(r)}{dr} \tag{22-9}$$

となるような関数 $F(r)$ があるとする．そうすると

$$f(r)\frac{dr}{d\sigma}=\frac{dF(r)}{dr}\frac{dr}{d\sigma}=\frac{dF}{d\sigma} \tag{22-10}$$

と書くことができる．(22-10) を (22-8) に代入すると

$$\frac{dU}{d\sigma}=-\frac{dF}{d\sigma}U \tag{22-11}$$

となる．この方程式はすぐに解ける．すなわち A を積分定数として

$$U(\sigma)=Ae^{-F} \tag{22-12}$$

である．

さて（22-7）は

$$f(r)=\frac{a}{r^2}\frac{1}{1-a/r} \tag{22-13}$$

に対応するから

$$F(r)=\log\left(1-\frac{a}{r}\right) \tag{22-14}$$

であり，これを（22-12）に代入すると

$$\frac{dw}{d\sigma}=u^0=A\frac{1}{1-a/r} \tag{22-15}$$

というように u^0 は r の関数として求められた．ここで σ の選び方にはあまり制限がなかったから $A=1$ となるようにそのスケールを決めても構わない．こうして

$$\frac{dw}{d\sigma}=\frac{1}{1-a/r}=-\frac{1}{g_{00}} \tag{22-16}$$

が得られた．つまり σ は，もし時空が平らならば座標時 w に一致するものである．

次に（22-5 b）を考える．ここで

$$\theta=\pi/2=\text{定数} \tag{22-17}$$

は明らかに（22-5 b）の解である（(22-5 b）の左辺の各項が全部ゼロになる）．（22-17）は運動が XY 面内で起こることに対応する．一般的にいえば運動は原点を含む一平面内で起こるということであるが，（22-17）のようにおいても一般性を失わない．

（22-17）を（22-5 c）に代入すると

$$\frac{d^2\varphi}{d\sigma^2}+2\frac{1}{r}\frac{dr}{d\sigma}\frac{d\varphi}{d\sigma}=0 \tag{22-18}$$

となる．これはまた（22-8）の型である．今度は $U=d\varphi/d\sigma$, $f(r)=2/r$ である．したがって $F(r)=2\log r=\log r^2$ となるから

$$\frac{d\varphi}{d\sigma}=he^{-\log r^2}=\frac{h}{r^2} \tag{22-19}$$

を得る．積分定数を h とした．（22-19）を

$$r^2\frac{d\varphi}{d\sigma}=h \tag{22-20}$$

と書くと，これは Newton 力学において中心力の場合の面積速度一定，または角運動量保存の式に相当するものであることがわかる．

さて (22-16)，(22-17)，(22-20) を (22-5 d) に代入すると

$$\frac{d^2r}{d\sigma^2}+\frac{a}{2r^2}\frac{1}{1-a/r}\left[1-\left(\frac{dr}{d\sigma}\right)^2\right]-\frac{h^2}{r^3}\left(1-\frac{a}{r}\right)=0 \qquad (22\text{-}21)$$

を得る．また条件 (22-3) を (21-30) に従って書くと

$$-\left(1-\frac{a}{r}\right)\left(\frac{dw}{d\sigma}\right)^2+\frac{1}{1-a/r}\left(\frac{dr}{d\sigma}\right)^2+r^2\left(\frac{d\varphi}{d\sigma}\right)^2=0 \qquad (22\text{-}22)$$

となる．ここで (22-17) により $d\theta=0$ とおいた．さらに (22-16)，(22-19) を使うと (22-22) は

$$\frac{1}{1-a/r}\left[1-\left(\frac{dr}{d\sigma}\right)^2\right]=\frac{h^2}{r^2} \qquad (22\text{-}23)$$

となる．これは直ちに (22-21) の左辺の第 2 項に代入することができる．少し整理すると (22-21) は結局

$$-\frac{d^2r}{d\sigma^2}+\frac{h^2}{r^3}=\frac{3}{2}\frac{ah^2}{r^4} \qquad (22\text{-}24)$$

という型になる．

軌道の方程式

ところで我々は光子の軌道の型を求めたいのである．それには $w(\sigma)$，$r(\sigma)$，$\varphi(\sigma)$ を全部求めなくても r を φ の関数として求めさえすればよい．たとえば図 47 のように原点から距離 l の所を通り，X 軸と角 α をなす直線運動

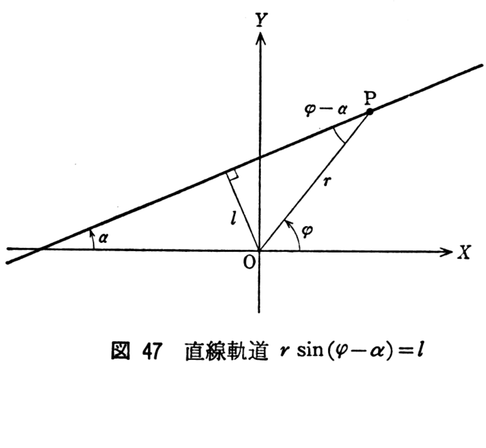


図 47 直線軌道 $r\sin(\varphi-\alpha)=l$

の“軌道”は

$$r=\frac{l}{\sin(\varphi-\alpha)} \tag{22-25}$$

で与えられる．

このような場合，慣習に従って

$$u\equiv 1/r \tag{22-26}$$

を $\varphi(\sigma)$ の関数とみなすのが便利である．したがって

$$\frac{dr}{d\sigma}=-\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\sigma},\qquad \frac{d^2r}{d\sigma^2}=2\frac{1}{u^3}\left(\frac{du}{d\sigma}\right)^2-\frac{1}{u^2}\frac{d^2u}{d\sigma^2} \tag{22-27}$$

である．u を φ の関数と考えるならば

$$\frac{du}{d\sigma}=\frac{du}{d\varphi}\frac{d\varphi}{d\sigma}\overset{(22\text{-}19)}{=}hu^2\frac{du}{d\varphi}. \tag{22-28}$$

$$\frac{d^2u}{d\sigma^2}\overset{(22\text{-}28)}{=}h\left(2u\frac{du}{d\sigma}\frac{du}{d\varphi}+u^2\frac{d^2u}{d\varphi^2}\frac{d\varphi}{d\sigma}\right)\overset{(22\text{-}19),\,(22\text{-}28)}{=}h^2u^3\left[2\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2+u\frac{d^2u}{d\varphi^2}\right] \tag{22-29}$$

となる．(22-28)，(22-29) を (22-27) の第2式の右辺に代入すると

$$\frac{d^2r}{d\sigma^2}=-h^2u^2\frac{d^2u}{d\varphi^2} \tag{22-30}$$

を得る．これを (22-26) とともに (22-24) に代入し，両辺を h^2u^2 で割ると

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2}+u=\frac{3}{2}au^2 \tag{22-31}$$

が得られる．これが望む軌道決定の方程式である．

近　似　解

方程式 (22-31) は u について非線型であるから簡単には解けない．しかし普通の状況では a は非常に小さな数である．いま原点にあるのは太陽であるとし，その表面近くを光が通るとしよう．そうすると $au\lesssim a/R_{\odot}=2.9\,\mathrm{km}/7.0\times10^5\,\mathrm{km}=4.1\times10^{-6}$ である．したがって (22-31) の右辺を“摂動”として近似的な解を求めることができる．

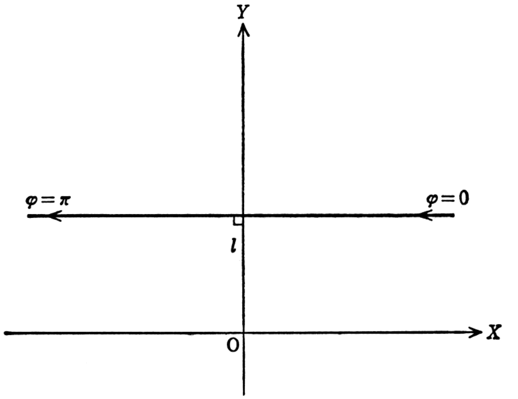
まず (22-31) の右辺をゼロとおくと (22-31) は

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2}+u=0 \tag{22-32}$$

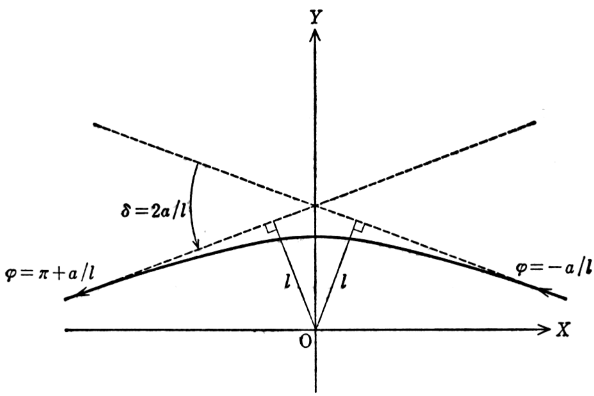
となり，その解は

$$u=\frac{1}{l}\sin\varphi \tag{22-33}$$

である．これは (22-25)，(22-26) からわかるように直線の方程式であり，重力のない場合 ($G=0$，したがって $a=2Gm/c^2=0$) として当然こうなっていなければならない．(22-33) では軌道は X 軸に平行であるとした (図 48(a))．



(a) x 軸に平行な直線軌道



(b) 角度 $\delta=2a/l$ だけ湾曲した軌道

図 48

次に (22-31) の右辺をとり入れるのであるが試みに

$$u(\varphi)=\frac{1}{l}\sin\varphi+b_1+b_2\sin^2\varphi \tag{22-34}$$

とおいてみる．右辺の第 2，第 3 項は補正項であり，第 1 項に比べて非常に小さいと考える．(22-34) を (22-31) の左辺に代入すると補正項の寄与だけが残り

$$b_1+b_2\sin^2\varphi+2b_2(1-2\sin^2\varphi)=b_1+2b_2-3b_2\sin^2\varphi \tag{22-35}$$

となる．また (22-34) を (22-31) の右辺に代入すると今度は補正項は効かない．なぜならば (22-31) の右辺にはすでに小さい数 a があり，(22-34) の第 2，第 3 項は ab_1, ab_2 等 2 次の微小量を与えるからである．残るのは (22-34) の右辺の第 1 項からの寄与のみで，これは

$$\frac{3}{2}a\frac{1}{l^2}\sin^2\varphi \tag{22-36}$$

である．(22-35) と (22-36) を等置すると

$$\begin{cases} b_1+2b_2=0 \\ -3b_2=\dfrac{3}{2}a\dfrac{1}{l^2} \end{cases} \tag{22-37}$$

を得る．これで (22-34) のような型は正しい近似解を与えることがわかった．(22-37) から得られる値を代入すると

$$u(\varphi)=\frac{1}{l}\sin\varphi+\frac{a}{l^2}-\frac{a}{2l^2}\sin^2\varphi \tag{22-38}$$

となる．

これはもはや直線ではない．しかし $r\to\infty$，つまり $u\to 0$ では漸近的に直線に近づく．そのことを見るには (22-38) をゼロとするような φ を求めてみればよい．$\sin\varphi$ に関する 2 次方程式を解くと $a\ll l$ として

$$\sin\varphi=2+a^2/l^2, \qquad -a/l \tag{22-39}$$

が得られる．このうち第 1 の解は不合理である．第 2 のものは

$$\varphi=\begin{cases} -a/l \\ \pi+a/l \end{cases} \tag{22-40}$$

を与える．これは図 48(a) の軌道が図 48(b) のように変更されることを示す．つまり光子の軌道は

$$\delta=2a/l \qquad (22\text{-}41)$$

だけ湾曲することになる.

l が小さいほどこの曲り方は大きくなる. 太陽のふちをかすめて通る光に対しては

$$\delta=2a/R_{\odot}=8.2\times10^{-6}=1.75''\,(角) \qquad (22\text{-}42)$$

となる†.

Einstein によって予言されたこの現象は 1919 年の日食に際して初めて観測が行なわれた. すなわち日食のときに太陽のすぐそばに見える星の写真をとり, 半年後, 太陽がないときの同じ星をとった写真と比べることによって星からくる光の湾曲を測定したのである. この観測の結果, 光は確かに太陽の重力を受けて曲がることがみとめられ, 一般相対論の輝かしい成功とみなされた. しかし理論値との定量的な一致に関してはまだ精度が不十分であった.

最近ではある種の星 (QSO) の出すマイクロ波を使って測定が行なわれ, 理論値との一致は 10% 程度の精度で確かめられている. さらに "レーダーエコー" の実験では人工衛星が地球から見て太陽の反対側にあるときに地球からレーダーを発射し, その反射波を受信するまでの時間を測定して, 光の湾曲と本質的に同じ効果を発見したのである. この場合も理論との一致はきわめてよかった.

もう一つ一般相対論の古典的な実験的検証としてよく知られているのは "水星の近日点移動" である. これはやはり太陽のまわりの Schwarzschild 時空の中で質点(水星)の軌道が Kepler 運動からずれる効果である. 水星の近日点移動については古くからの観測結果があり, 以前の理論的計算と一致せず, 天文学の一つのなぞとされていた. Einstein はこのずれが一般相対論で非常にうまく説明できることを発見し, 自らの理論に自信をもったといわれている.

上に述べたいくつかの実験的事実はいずれも $r\gg a$ であり, したがって重力があまり強くない場合に関するものである. しかし前節の終りで説明したようにもし超高密度の天体があり, $r\sim a$ または $r<a$ のような距離に近づくことができるとすればどうなるであろうか. このときには重力が極端に強くなり, 弱い重力の場合からは全く予想できなかったことが起こるかもしれない.

† 太陽の視直径は約 30′ (角) である. δ はこれの約 1/1000 である.

次節ではそのような場合を調べてみよう.

§23 ブラックホール

Kruskal 座標

Schwarzschild 時空の構造を見通しよく調べるために Kruskal に従って次のような変数変換を行なってみる.

$$\begin{cases} u=\sqrt{\dfrac{r}{a}-1}\,e^{r/2a}\cosh\dfrac{w}{2a} \\ v=\sqrt{\dfrac{r}{a}-1}\,e^{r/2a}\sinh\dfrac{w}{2a} \end{cases} \tag{23-1}$$

これはいまのところ

$$r>a, \qquad -\infty<w<\infty \tag{23-2}$$

に対する式である.

(23-1) からは

$$\begin{cases} u^2-v^2=\left(\dfrac{r}{a}-1\right)e^{r/a} \\ \dfrac{w}{2a}=\tanh^{-1}\dfrac{v}{u} \end{cases} \tag{23-3}$$

が得られる. (23-1) または (23-3) を使って $(r,\ w)$ の 2 次元空間を $(u,\ v)$ 空間に射影すると図 49 のようになる. (23-1) の第 1 式から $u>0$, また (23-3) の第 1 式からは $|u|>|v|$ であるので, 図 49 の目盛をつけた部分 (領域 I と呼ぶ) だけを考えているのである.

(23-1) を微分すると

$$\begin{cases} du=\dfrac{e^{r/2a}}{2a}\left[\left(\dfrac{1}{\sqrt{r/a-1}}+\sqrt{\dfrac{r}{a}-1}\right)\left(\cosh\dfrac{w}{2a}\right)dr+\sqrt{\dfrac{r}{a}-1}\left(\sinh\dfrac{w}{2a}\right)dw\right] \\ dv=\dfrac{e^{r/2a}}{2a}\left[\left(\dfrac{1}{\sqrt{r/a-1}}+\sqrt{\dfrac{r}{a}-1}\right)\left(\sinh\dfrac{w}{2a}\right)dr+\sqrt{\dfrac{r}{a}-1}\left(\cosh\dfrac{w}{2a}\right)dw\right] \end{cases} \tag{23-4}$$

が得られる. これより

$$(du)^2-(dv)^2=\frac{r}{4a^3}e^{r/a}\left[-\left(1-\frac{a}{r}\right)(dw)^2+\frac{1}{1-a/r}(dr)^2\right] \quad (23\text{-}5)$$

を得る．これを以前の ds^2 の式 (21-30) と比べると

$$ds^2=\frac{4a^3}{r}e^{-r/a}[(du)^2-(dv)^2]+r^2d\Omega^2 \quad (23\text{-}6)$$

と書けることがわかる．

(21-30) の型によると，$r=a$ では $g_{00}=0$, $g_{33}=\infty$ という非常に特別のことが起こっているように見える．しかし Kruskal の変数では，(23-3) からわか

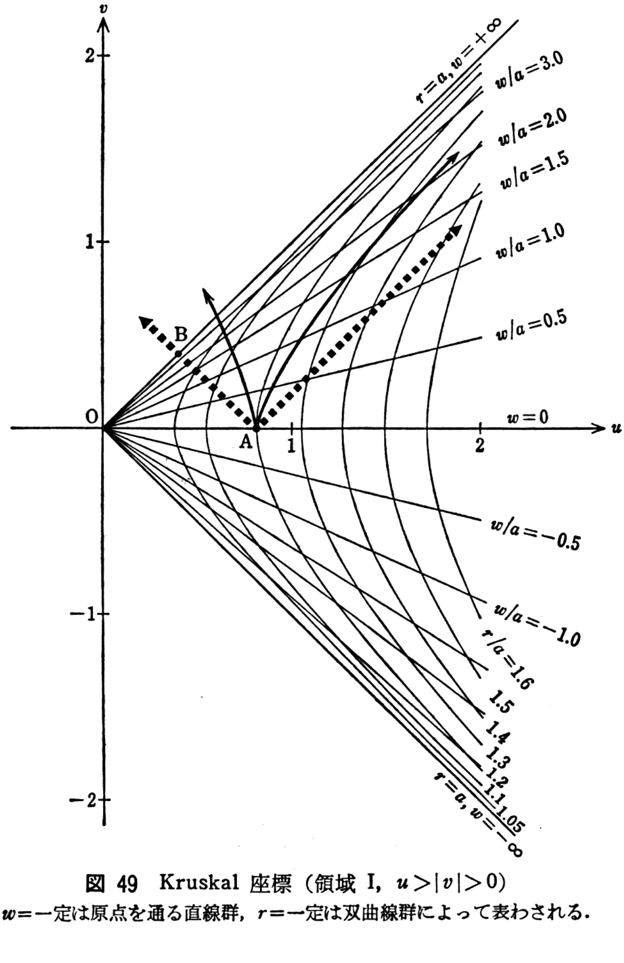


図 49 Kruskal 座標（領域 I, $u>|v|>0$）
w=一定は原点を通る直線群，r=一定は双曲線群によって表わされる．

るように $r=a$ は

$$v=\pm u \tag{23-7}$$

に対応する．この場所は (23-6) の型によれば線素に何も特別なことを引き起こしていないことに注意してほしい．

中心へ向かうか，または中心から遠ざかる光子の軌道は (23-6) で $ds^2=0$, $d\theta=d\varphi=0$ とおくことによって得られる．すなわち

$$(du)^2-(dv)^2=0 \tag{23-8 a}$$

または

$$dv=\pm du \tag{23-8 b}$$

であり，ちょうど特殊相対論の Minkowski 空間の場合のように，図 49 の中で 45° の直線で表わされる．図中，点Aから出発する2本の破線はその例である．このうち，右上に向かうものは $t=0$ に $r>a$ の1点を出て外に向かう光を表わし，左上に向かう線は中心に向かう光に対応する．中心に向かう光は点Bで $r=a$ に行きつく．しかし図によれば，それまでに時間 t は無限に長くかかっていることになる．

点Aから出た質点の軌道は上に述べた光の軌道（光円錐の断面）の内側にあるはずである．たとえば図中に実線で示した曲線がそうである．左上向きのものは中心へ向かって落下する（r が小さくなる）もので，やはり**無限大の時間をかけて Schwarzschild 半径に達する**．

有限な距離を行くのに無限大の時間がかかるというのは奇妙である．特にこの場合は落下するにつれて引力は大きくなるのであるからなおさらである．

座標時と固有時の関係

この問題を考えるためには座標時 t と固有時 τ との関係を調べてみる必要がある．Schwarzschild 時空の中での質点の運動方程式を得るには，§22 で調べた光の運動方程式 (22-2) において $d\sigma$ を $d\tau$ でおき換えればよい．(22-15) も $d\sigma$ を $d\tau$ でおき換えればそのまま成り立つ．

$$\frac{dw}{d\tau}=A\frac{1}{1-a/r}. \tag{23-9}$$

ここで質点は $r\to\infty$ で静止していたものが落ちてくるものとする．したがっ

て $dw/d\tau$ は $r\to\infty$ で1になっていなければならない．それには $A=1$ とおけばよい．すなわち

$$\frac{dw}{d\tau}=\frac{1}{1-a/r}=-\frac{1}{g_{00}}. \tag{23-10}$$

この式は大変奇妙なことを表わしている．つまり座標時で測る時計の動きは $r\to a$ とともにどんどん早くなり，$r=a$ ではその早さが無限大になるのである．さらに $r<a$ では $dw/d\tau<0$ となり，t には普通の時間の意味を与えることはできなくなる．

ところで線素の式 (21-30) で $ds^2=-(d\tau)^2$, $d\theta=d\varphi=0$ とおくと

$$-(d\tau)^2=-\left(1-\frac{a}{r}\right)(dw)^2+\frac{1}{1-a/r}(dr)^2 \tag{23-11}$$

となる．この両辺を $(d\tau)^2$ で割り，さらに (23-10) を代入すると

$$-1=-\frac{1}{1-a/r}+\frac{1}{1-a/r}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 \tag{23-12}$$

を得る．これから次式が出てくる．

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2=\frac{a}{r}=\frac{2Gm}{c^2r} \tag{23-13}$$

これは Newton の力学で得られる式とそっくり同じ型をしている．つまり (23-13) を τ で微分し，両辺を $2(dr/d\tau)$ で割ると

$$\frac{d^2r}{d\tau^2}=-\frac{Gm}{c^2r^2} \tag{23-14}$$

が得られるが，これは中心に向かって引力があるときの Newton の運動方程式

$$\frac{d^2r}{dt^2}=-\frac{Gm}{r^2} \tag{23-15}$$

と，$\tau=ct$ としたときに一致する．

実際には (23-10) のために τ と ct とは大変違うのであるが，とにかく τ を変数としてみると，(23-14) で支配される質点の運動には，$r=a$ で何も変わったことはないということが容易に想像できるであろう．

このことをもっと具体的に見るために (23-13) を積分してみよう．

$$\frac{dr}{d\tau}=\pm\sqrt{\frac{a}{r}} \tag{23-16}$$

から

$$\frac{2}{3}\left(\frac{r}{a}\right)^{3/2}=\pm\frac{\tau-\tau_0}{a} \tag{23-17}$$

を得る．ここで τ_0 は $r=0$ となるときの τ の値である．

中心へ向かって落下する場合には (23-17) の右辺のマイナスの方をとる．これによると $r>a$ なる1点から出発して $r=a$ に達するのに要する時間は**固有時で測れば確かに有限である**．さらに $r=a$ の球面を通過した後，有限の固有時の経過の後に原点 $r=0$ にまで達する．つまり落下していく質点に乗った観測者から見ると，$r=a$ の地点を通過することは何も不思議な現象ではないのである．不思議に思うのは，遠方で用いた座標時をそのまま用いている観測者だけである．

また (23-16) によれば $dr/d\tau$ は $r=a$ で1，すなわち“光速”に達し，$r<a$ では“光速”をこえることになる．しかしこれは別に特殊相対論に反するわけではない．$dr/d\tau$ という量は特殊相対論で意味のある速度ではない†．

Schwarzschild 半径の内側

このように考えてくると Schwarzschild 半径より内側の領域も物理的に意味がありそうに思われてくる．$r<a$ にはいりこんだ質点や光はどのように振る舞うであろうか．これを調べるにはやはり Kruskal 座標が便利である．

前に強調したように (23-6) は $v=u$ の上で何も特別なことが起こっていないことを示している．そこで図 49 における $v=u>0$ の直線をこえて，その左上の領域にはいりこんでみよう．このときには

$$u^2-v^2<0 \tag{23-18}$$

となるので (23-1) の式は使えない．しかし (23-1) をこのような領域に“解析接続”することが可能である．つまり

$$\begin{cases} u=\sqrt{1-\dfrac{r}{a}}\,e^{r/2a}\sinh\dfrac{w}{2a} \\ v=\sqrt{1-\dfrac{r}{a}}\,e^{r/2a}\cosh\dfrac{w}{2a} \end{cases} \tag{23-19}$$

† ここで考える $dr/d\tau$ は2次元の Lorentz 変換 (4-10) でいえば $\partial x/\partial w'=\gamma\beta$ のようなもので，大きさに上限はない．

とおくのである．こうすると

$$\begin{cases} u^2-v^2=-\left(1-\dfrac{r}{a}\right)e^{r/a}=\left(\dfrac{r}{a}-1\right)e^{r/a} \\ \dfrac{w}{2a}=\tanh^{-1}\dfrac{u}{v} \end{cases} \tag{23-20}$$

となる．(23-20) の第1式は (23-3) の第1式と同じ関数型をしている．もちろん $u^2-v^2<0$ は $r<a$ を意味している．新しく考える領域（領域 II と呼ぶ）は図 50 に示してある．

原点 $r=0$ は

$$u=\sinh\frac{w}{2a}, \qquad v=\cosh\frac{w}{2a} \tag{23-21}$$

に射影され，図中の一番上の双曲線で示される．これより上の領域には物理的な意味がない．v 軸より右では $w>0$，左では $w<0$ である．

この領域 II でも光の軌道が 45° の直線であることは前と同じである．した

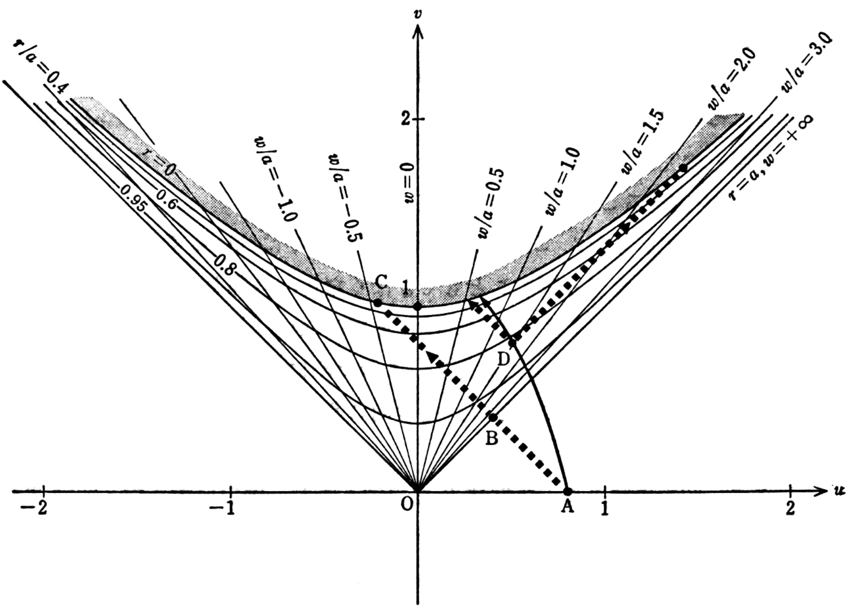


図 50 Kruskal 座標（領域 II，$v>|u|>0$）
図 49 の説明を参照せよ．影をつけてある部分は $r<0$ に対応し，物理的には意味がない．

がって図の点 B（これは図 49 の点 B である）で $r=a$ の球面を横切った光子はやはり左上方向に進み，点 C で中心 $r=0$ に達する．このとき座標時 $w=ct$ は $+\infty$ からだんだん**減少し**（！），中心に達するには $-\infty$ かかるということになる．この“減少”については（23-10）の所でもすでに述べておいた．

$r=a$ の面をこえてはいってきた質点についても同じようなことが起こる．しかしすでに明らかになったように固有時で測れば有限な固有時の経過の後に中心に達するのである．

さてこのように $r<a$ にはいりこんだ質点に乗った観測者が光を発したとしよう．図ではその世界点は D である．内向きの光の軌道は左上に向かう 45° の直線で表わされ，これは中心に向かう．一方図中で右上 45° の直線は外向きの軌道と考えたいところである．しかし図の目盛を見ると，この直線に沿って右上に進むと r は**減少し**，遂に $r=0$ に達することがわかる．つまり光線はともに中心に向かうのである．極端に強い重力はこのような威力をふるうのである．

二つの光の軌道は光円錐の断面を表わしているのであるが，図 50 で左上向きの軌道では座標時 w が減少し，右上向きのものでは w が増大する．一方 r はどちらについても減少する．つまり時間と（半径方向の）空間座標の役割が普通の場合とは完全に逆になっているのである．これは g_{00} と g_{33} がともに $r=a$ で符号を変えることの結果に他ならない．

このようにしていったん Schwarzschild 半径の中にはいってしまうと，もはや外部に光の信号を送り返すこともできなくなる．外部から光を送って，それが内部で反射されたとしても反射光は戻ってこない．したがって外部から見ていると半径 a の球面は真黒に見える．このために半径 a の球はブラックホールと呼ばれる，また，その表面は，その向こうを見ることができないという意味で“地平面”とも呼ばれる．

これまで，解析接続によって領域 II まで考えたが，同様な考えで，領域 III，IV を考えることもできる（図 51）．その詳しい議論にはここでは立ち入らない．ただこの考え方をおし進めると“ホワイトホール”というものの存在も導かれることを付言しておこう．これはブラックホールと反対に，そこからは光や質点が出てくるばかりで，吸いこまれることがないようなものである．図

51 で太線で示した 45° の線はブラックホールの地平面であり，波線で示した直線がホワイトホールの地平面である．

このようなホワイトホールは果たして実在するであろうか．興味はさらに尽きないが本の方はこの辺りで終りにしよう．

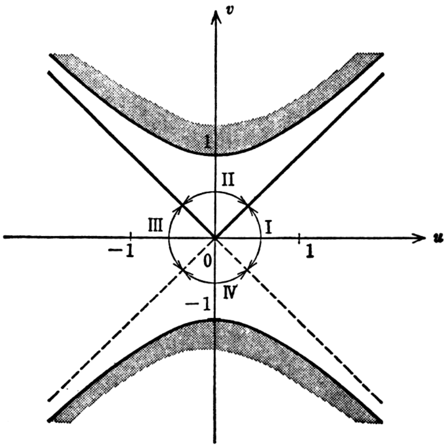


図 51　Kruskal 時空の四つの領域

参　考　書

初めにも書いたようにこの本でとり上げなかった話題，題材は数多くある．この本で身につけた基礎知識をもとにしてさらに広く，深く学びたいと思う読者のために参考書を挙げておこう．Einstein の原論文以来多くの本があるが，ここでは最近の学問の発展傾向に合致するように比較的新しいもののみに限った．

啓　蒙　書

D. W. Sciama : The Unity of the Universe (Anchor, 1961) [林一訳：相対性・重力・宇宙（ダイヤモンド社，1968)].

J. L. Synge : Talking About Relativity (North Holland, 1970) [中村誠太郎訳：相対性理論の考え方（講談社，1971)].

中野董夫，菅野禮司：相対性理論はむずかしくない（講談社，1972).

内山龍雄：相対性理論入門（岩波新書，1978).

専　門　書

L. Landau and E. Lifshitz : The Classical Theory of Fields (Teoriya Polya, Nauka, Moscow, 1941) [広重　徹，恒藤敏彦訳：場の古典論（東京図書，1964)].

平川浩正：相対論（共立出版，1971).

S. Weinberg : Gravitation and Cosmology (John Wiley, 1972).

C. W. Misner, K. S. Thorne and J. A. Wheeler : Gravitation (W. H. Freeman, 1973).

P. A. M. Dirac : General Theory of Relativity (John Wiley, 1975) [江

沢　洋訳：一般相対性理論（東京図書，1977)].

内山龍雄：一般相対性理論（裳華房，1978).

なお，上の分類の中間になるかもしれないが，最近の話題をきわめて豊富にとり入れたものとして

佐藤文隆，R. Ruffini：ブラックホール（中央公論社，1976).

がある．また微分幾何学の入門書として

松本　誠：計量微分幾何学（裳華房，1975).

を挙げておく．

これらは筆者が，この本を書くに当たっていろいろな型で参照した本でもある．この機会に著者ならびに訳者の方々に感謝の意を表しておきたい．

索　　引

太字はその項目が節の見出し，または小見出しに現われるページを示す．

さ 行

<著者略歴>

藤井 保憲（ふじい やすのり）

1954年　名古屋大学理学部卒業
1959年　名古屋大学大学院博士課程修了（理学博士）
　　　　日本大学理工学部助手，講師，東京大学教養
　　　　学部助教授を経て
現　在　東京大学教養学部教授

物理学の廻廊

時空と重力　　　　定価1700円

昭和54年7月30日　初　版
昭和55年1月25日　第2刷

著　者　藤　井　保　憲
発行者　森　田　勝　久
発行所　産業図書株式会社
東京都千代田区外神田 1-4-21
郵便番号 101-91
電　話　東京 (253) 7821 (代)
振替口座　東京 2-27724番

新日本印刷・関口製本

「物理学の廻廊」刊行によせて

高校の物理を一通り学んだ者が更に深く物理を勉強しようとする場合に色々な選択がありうる．通俗的な解説書により大要を掴もうとするのも一方法であり，また正統的な教科書により勉強するのも一方法である．しかしながら前者にあっては，靴を隔てて痒きを掻くの感がしないでもない．すなわち肝心の本体の周りでどうどう巡りをしていていつまで経っても本当にわかったような気がしないという焦躁感にかられることがある．これは数理科学である物理学を数式抜きで理解しようとするところにその原因があるのではなかろうか．高校の物理以上のことを理解しようという意欲のある者にとっては，初等的な数式による記述はかえって理解を深めるための助けになるのではないだろうか．また後者の正統的な教科書で学ぶ方法は最善かもしれないが，通常この方法では，力学・電磁気学等の各分野をそれぞれ初めから勉強し直す．

しかし高校で一応勉強した者にとっては繰返しが多過ぎるのではないかと思われる．高校の物理と比較すると，本質的なことは変わらないのに用いられている数学的表現のみが高度になっているという場合が多い．

高校の数学では微積分を習うのに，高校の物理では不思議なことに微積分が使われていないので，一つの方程式から出て来る結果をばらばらに暗記しなければならないことがよくある．そもそも微積分は物理との関連において発達した数学の分野であることを考慮すると，この制限はいかにも不自然である．実際に高校以上の物理を学ぶのに必要な数学は，少数の例外を除いては高校で習う数学だけではとんど十分なのである．

そこで本シリーズにおいては，高校で習った物理と数学の知識に基づいて色々な分野の関連を考え，あまり狭い枠組にとらわれずに物理学を概観することを試みた．また一冊一冊が小冊子であるので，すべての分野を詳細に，百科辞典式に記述することは初めから考えず，最重要綱目としてすべての分野に共通な概念に重点を置くという方針を採った．

このようなもくろみが成功するかどうかはわからないが，このような考え方が少しでも読者のお役に立てば幸いである．

西島和彦

物理学の廻廊

西島和彦著	力学系と自然法則	定価 1500 円
藤井保憲著	時空と重力	定価 1700 円
山本祐靖著	電磁場・存在の一形態	定価 1600 円